
Bases en espacios de Hilbert: teoría de muestreo y wavelets

Antonio García García

Departamento de Matemáticas

Universidad Carlos III de Madrid

Gracias a la enseanza pública española

Escribiendo el currículum

¿Qué hay que hacer?

*Presentar una instancia
y adjuntar el currículum.*

*Sea cual fuere el tiempo de una vida
el currículum debe ser breve.*

*Se ruega ser conciso y seleccionar los datos,
convertir paisajes en direcciones
y recuerdos confusos en fechas concretas.*

*De todos los amores basta con el conyugal,
los hijos: sólo los nacidos.*

*Importa quién te conoce, no a quiénes conozcas.
Viajes, sólo al extranjero.*

*Militancia en qué, pero no por qué.
Condecoraciones sin mencionar a qué méritos.*

*Escribe como si jamás hubieras dialogado contigo mismo
y hubieras impuesto entre tú y tú la debida distancia.*

*Deja en blanco perros, gatos y pájaros,
bagatelas cargadas de recuerdos, amigos y sueños.*

Importa el precio, no el valor.

Interesa el título, no el contenido.

*El número de calzado, no hacia dónde va
quien se supone que eres.*

*Adjuntar una fotografía con la oreja visible:
lo que cuenta es su forma, no lo que oye.*

¿Qué oye?

El fragor de la trituradora de papel.

(Wisława Szymborska)

¿Cuál es la diferencia

*entre la cigarra y la hormiga,
entre el que disipa y el que conserva,
si los dos saldrán desnudos
del viaje que al final*

*todo empareja? No hay vencido
ni vencedor, el dicho popular
señala con acierto la trampa
mortal que hay en elegir.*

*Como barcas quisiéramos navegar
hacia playas mejores, pero quedamos
anclados a nuestra nada.*

(Eugenio Montale)

Los contenidos de este libro se pueden considerar una síntesis de la docencia impartida por el autor, durante los últimos años, en la asignatura *Espacios de Hilbert, wavelets y teoría de muestreo* del Máster en Ingeniería Matemática de la Universidad Carlos III de Madrid. Su objetivo principal es llevar a cabo un estudio introductorio de las bases ortonormales, de las bases de Riesz y de los frames en un espacio de Hilbert separable, así como de algunas aplicaciones importantes como son la teoría de muestreo de señales y las bases ortonormales de wavelets.

La motivación del problema tratado es muy simple: Queremos caracterizar cada elemento x perteneciente a un cierto espacio de Hilbert separable \mathcal{H} mediante la sucesión numérica $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ obtenida a partir de una sucesión fija $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} . En primer lugar, si queremos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ determine unívocamente cada elemento x de \mathcal{H} , deberemos pedir que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea un *sistema completo* en \mathcal{H} , es decir, el único vector de \mathcal{H} ortogonal a todos los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea el vector nulo. Aunque sabemos que las combinaciones lineales finitas de los elementos de la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ son densas en el espacio \mathcal{H} , no se conoce, en general, ninguna manera practicable de recuperar x a partir de la sucesión $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$. Por tanto, a la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ deberemos exigirle alguna condición adicional, por ejemplo, el concepto de ℓ^2 -estabilidad que introducimos a continuación de manera intuitiva: Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es ℓ^2 -estable en \mathcal{H} si para todos $x, y \in \mathcal{H}$ se cumple:

$$\|\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty} - \{\langle y, x_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_{\ell^2(\mathbb{N})} \text{ “pequeño”} \iff \|x - y\|_{\mathcal{H}} \text{ “pequeño”}.$$

El concepto de ℓ^2 -estabilidad nos lleva al concepto de *frame* en un espacio de Hilbert, concepto introducido por Duffin y Shaeffer en 1952 (véase [8]): Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es un *frame* en el espacio de Hilbert \mathcal{H} si existen dos constantes positivas $0 < A \leq B$ (llamadas cotas *frame*) tales que:

$$A\|x\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, x_n \rangle|^2 \leq B\|x\|^2 \text{ para todo } x \in \mathcal{H}.$$

Como veremos en el capítulo 1, todo elemento $x \in \mathcal{H}$ se puede recuperar (en general, de manera no única) a partir de los elementos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un *frame* de \mathcal{H} . En el caso de exigir unicidad, surgen las bases de Riesz que engloban, en particular, a las bases ortonormales. Todo esto será el objeto de estudio del capítulo 1. En este capítulo seguiremos el desarrollo usual de bases ortonormales, bases de Riesz, para terminar con la teoría de frames. Dentro del apartado de bases ortonormales, dedicaremos un pequeño estudio a las series de Fourier clásicas.

Desde el punto de vista de las aplicaciones, se trata de encontrar sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ en espacios de Hilbert concretos, en donde se aplique la teoría general estudiada en el capítulo 1. Dos ejemplos de particular interés vienen dados por la teoría de muestreo y la teoría de wavelets. En el caso de la teoría de muestreo, particularizada en los espacios

de Paley-Wiener $PW_\pi := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} \equiv 0 \text{ fuera de } [-\pi, \pi]\}$, la sucesión $\{\langle x, x_n \rangle\}_{n=1}^\infty$ coincide con una sucesión de muestras de una determinada función. Un estudio de la teoría de muestreo en los espacios de Paley-Wiener es el objetivo del capítulo 3. Los espacios de Paley-Wiener son un caso particular de espacios de Hilbert con núcleo reproductor, espacios de Hilbert de funciones para los que los funcionales de evaluación son continuos. Una consecuencia importante es que la convergencia en norma implica convergencia puntual, o lo que es lo mismo, algunas propiedades geométricas del espacio tienen su consecuencia analítica. Este capítulo comienza con una introducción de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor, mostrando sus propiedades más importantes así como algunos ejemplos. El capítulo 3 finaliza con una generalización de la teoría de muestreo clásica a subespacios de $L^2(\mathbb{R})$ invariantes por traslación. Los espacios de Paley-Wiener son un caso particular de espacios invariantes por traslación en donde el generador del espacio es la función seno cardinal.

Puesto que en la definición de los espacios de Paley-Wiener aparece involucrada la transformada de Fourier, el capítulo 2 se dedica al estudio de la transformada de Fourier en los espacios $L^1(\mathbb{R})$ y $L^2(\mathbb{R})$, así como de sus propiedades más importantes. En cualquier caso, la transformada de Fourier será una herramienta fundamental a lo largo de toda la monografía. Prestaremos atención a algunos temas relacionados con ella como son el principio de indeterminación, la fórmula sumatoria de Poisson o la transformada de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$. La importancia práctica de estos conceptos se pondrá de manifiesto en los capítulos 3 y 4.

Finalmente, en el capítulo 4, después de una breve introducción de las transformadas tiempo-frecuencia y tiempo-escala, nos dedicaremos a la construcción de bases ortonormales de wavelets en $L^2(\mathbb{R})$, a partir de un análisis multirresolución. Se hará hincapié en cuestiones prácticas como son los algoritmos de descomposición y reconstrucción, y su interpretación en términos de filtros digitales. Finalizaremos dando algunos ejemplos de bases ortonormales de wavelets en $L^2(\mathbb{R})$. En cualquier caso, se pretende que este capítulo sea motivador para un estudio posterior, más avanzado, siguiendo alguna de las excelentes monografías existentes.

En definitiva, este libro pretende tender un puente entre la teoría elemental de bases ortonormales en un espacio de Hilbert y desarrollos posteriores más sofisticados, que, muchas veces, sólo se encuentran en el mundo de los especialistas. Debido al carácter sutil de las matemáticas, estoy seguro de que se me habrá escapado algún error, algún paso sin justificar, etc. Espero que, en ningún caso, afecte a la visión global que este libro pretende.

Quisiera agradecer a la profesora María José Muñoz Bouzo de la U.N.E.D. por su lectura crítica de este trabajo. La figura de la portada ha sido realizada con el programa Wordle™.

Leganés, septiembre de 2012

Índice general

1. Bases ortonormales, bases de Riesz y frames en un espacio de Hilbert	1
1.1. Preliminares sobre espacios de Hilbert	1
1.2. Bases ortonormales en un espacio de Hilbert	7
1.3. Series de Fourier clásicas: convergencia puntual	17
1.4. Bases de Riesz en un espacio de Hilbert separable	30
1.5. Frames en un espacio de Hilbert separable	35
2. Transformada de Fourier	49
2.1. Operadores de convolución	50
2.2. La transformada de Fourier	56
2.2.1. La transformada de Fourier en $L^1(\mathbb{R})$	57
2.2.2. La transformada de Fourier en $L^2(\mathbb{R})$	64
2.2.3. Fórmula sumatoria de Poisson	70
2.2.4. Principio de indeterminación	71
2.3. La transformada de Hilbert en $L^2(\mathbb{R})$	73
3. Teoría de muestreo	75
3.1. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor	75
3.2. Espacios de Paley-Wiener	81
3.3. Muestreo en un subespacio invariante por traslación de $L^2(\mathbb{R})$	98

4. Introducción a la teoría de wavelets: bases ortonormales de wavelets	109
4.1. Análisis tiempo-frecuencia y tiempo-escala	110
4.1.1. Transformada continua de Gabor	111
4.1.2. Transformada wavelet continua	115
4.2. Bases ortonormales de wavelets	118
4.2.1. Análisis multirresolución en $L^2(\mathbb{R})$	118
4.2.2. Construcción de bases ortonormales a partir de un MRA	124
4.2.3. Algoritmos de descomposición y reconstrucción	129
4.3. Algunos ejemplos de wavelets	134
 Bibliografía	 141
 Lista de Símbolos	 143
 Índice alfabético	 146

3

Teoría de muestreo

La teoría de muestreo trata de la recuperación de las funciones de un cierto espacio a partir de una sucesión de sus muestras. Esto no siempre es posible; por ejemplo, una función continua f no está unívocamente determinada por una sucesión de sus valores $\{f(t_n)\}$. Las muestras de una función se obtienen a partir de los funcionales evaluación $E_{t_n}(f) := f(t_n)$. Si en un espacio de Hilbert de funciones \mathcal{H} , cada funcional evaluación $f \in \mathcal{H} \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ está acotado, por el teorema de representación de Riesz existirá un único elemento $k_t \in \mathcal{H}$ tal que $f(t) = \langle f, k_t \rangle$ para todo $f \in \mathcal{H}$. Por tanto la recuperación estable de toda función $f \in \mathcal{H}$ a partir de una sucesión de sus muestras $\{f(t_n)\}$ dependerá de que la correspondiente sucesión $\{k_{t_n}\}$ sea un frame (lo que incluye bases ortonormales y bases de Riesz) en \mathcal{H} . Estos espacios de Hilbert de funciones, apropiados para desarrollar en ellos una teoría de muestreo, son los denominados espacios de Hilbert con núcleo reproductor (RKHS por sus siglas inglesas: *reproducing kernel Hilbert spaces*).

3.1. Espacios de Hilbert con núcleo reproductor

En esta sección estudiaremos los espacios de Hilbert con núcleo reproductor para los que las propiedades analíticas y geométricas están, como veremos, muy interrelacionadas. A lo largo de este capítulo denotaremos por \mathcal{H} un espacio de Hilbert de funciones $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definidas en el mismo conjunto Ω (generalmente un subcon-

junto de \mathbb{R} o \mathbb{C}), dotado de un producto interno $\langle \cdot, - \rangle$. Para cada $t \in \Omega$, la aplicación

$$\begin{aligned} E_t : \mathcal{H} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ f &\longmapsto E_t(f) = f(t), \end{aligned}$$

denotará el **funcional evaluación** en t .

Definición 3.1. Diremos que un espacio de Hilbert \mathcal{H} de funciones definidas en un conjunto Ω es un **espacio de Hilbert con núcleo reproductor** si todos los funcionales evaluación son acotados en \mathcal{H} . En otras palabras, para cada $t \in \Omega$ existe una constante positiva M_t tal que $|f(t)| \leq M_t \|f\|$ para toda función $f \in \mathcal{H}$.

Para cada $t \in \Omega$, por el teorema de representación de Riesz existe un único elemento $k_t \in \mathcal{H}$ tal que $f(t) = \langle f, k_t \rangle$ para todo $f \in \mathcal{H}$. Lo anterior nos lleva a la definición de núcleo reproductor en \mathcal{H} :

Definición 3.2. La función $k : \Omega \times \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ definida mediante

$$k(t, s) := \langle k_s, k_t \rangle = k_s(t), \quad (t, s) \in \Omega \times \Omega,$$

se denomina **núcleo reproductor** de \mathcal{H} .

De la definición del núcleo reproductor k se deduce que:

- Para cada $s \in \Omega$ fijo, la función $k(\cdot, s) = k_s(\cdot)$ pertenece a \mathcal{H} .
- Se verifica la **propiedad reproductora** de \mathcal{H} :

$$f(s) = \langle f, k(\cdot, s) \rangle \text{ para todo } f \in \mathcal{H} \text{ y } s \in \Omega. \quad (3.1)$$

Proposición 3.1. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert de funciones definidas en Ω tal que existe una función k cumpliendo las dos propiedades anteriores. Entonces, \mathcal{H} es un **RKHS**.

Demostración. En efecto, basta aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz a la propiedad reproductora (3.1) para probar que cada funcional evaluación E_t es acotado. \square

Proposición 3.2. El núcleo reproductor k de un espacio **RKHS** es único.

Demostración. Supongamos que $k'(t, s) = k'_s(t)$ fuese otro núcleo reproductor. Para $t, s \in \Omega$ se tendría que

$$k'_s(t) = \langle k'_s, k_t \rangle = \overline{\langle k_t, k'_s \rangle} = \overline{k_t(s)} = \langle k_s, k_t \rangle = k_s(t),$$

de donde se deduce que $k = k'$. \square

Si conocemos una base ortonormal $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathcal{H} es fácil encontrar una expresión para k :

Proposición 3.3. *Sea $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ una base ortonormal de \mathcal{H} . Para cada $t, s \in \Omega$ se tiene la siguiente expresión del núcleo reproductor*

$$k(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \overline{e_n(s)}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Desarrollando k_t y k_s en la base ortonormal $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ de \mathcal{H} se obtiene que $k_t = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_t, e_n \rangle e_n$ y $k_s = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_s, e_n \rangle e_n$, de donde

$$k(t, s) = \langle k_s, k_t \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_s, e_n \rangle \overline{\langle k_t, e_n \rangle} = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(s)} e_n(t).$$

□

Proposición 3.4. *Sea $\{e_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ una base de Riesz de \mathcal{H} con base dual $\{\tilde{e}_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$. Para cada $t, s \in \Omega$ se obtiene las siguientes expresiones del núcleo reproductor*

$$k(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n(t) \overline{\tilde{e}_n(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{e}_n(t) \overline{e_n(s)}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sabemos que $k(t, s) = \langle k_s, k_t \rangle$ para $t, s \in \Omega$. Desarrollando k_s respecto de la base dual $\{\tilde{e}_n\}_{n=1}^{\infty}$ y k_t respecto de la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ se obtiene

$$k_s = \sum_{n=1}^{\infty} \langle k_s, \tilde{e}_n \rangle \tilde{e}_n = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(s)} \tilde{e}_n; \quad k_t = \sum_{m=1}^{\infty} \langle k_t, e_m \rangle e_m = \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{e}_m(t) e_m.$$

Por tanto,

$$k(t, s) = \langle k_s, k_t \rangle = \sum_{n,m} \overline{e_n(s)} \tilde{e}_m(t) \langle \tilde{e}_n, e_m \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{e_n(s)} \tilde{e}_n(t),$$

ya que $\langle \tilde{e}_n, e_m \rangle = \delta_{n,m}$. La otra expresión se obtiene intercambiando las bases. □

El siguiente resultado es una propiedad importante de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor que nos relaciona la convergencia en norma con la convergencia puntual en Ω :

Proposición 3.5. *En un espacio de Hilbert con núcleo reproductor \mathcal{H} la convergencia en norma implica convergencia puntual en Ω , que es uniforme en subconjuntos de Ω en donde la función $t \mapsto k(t, t)$ esté acotada.*

Demostración. Sea $\{f_n\}$ una sucesión en \mathcal{H} tal que $f_n \rightarrow f$ cuando $n \rightarrow \infty$. Aplicando la propiedad reproductora (3.1) a la función $f_n - f \in \mathcal{H}$ obtenemos que $f_n(t) - f(t) = \langle f_n - f, k(\cdot, t) \rangle$. Finalmente, la desigualdad de Cauchy-Schwarz nos permite escribir

$$|f_n(t) - f(t)| \leq \|f_n - f\| \|k(\cdot, t)\| = \sqrt{k(t, t)} \|f_n - f\| \rightarrow 0, \text{ cuando } n \rightarrow \infty.$$

Además, la convergencia puntual será uniforme en subconjuntos de Ω en donde la expresión $\sqrt{k(t, t)}$ esté acotada. \square

Supongamos que nuestro espacio de Hilbert con núcleo reproductor \mathcal{H} es un subespacio (cerrado) de un espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$ (no necesariamente con núcleo reproductor). En este caso, se cumple el siguiente resultado:

Proposición 3.6. *Si el espacio de Hilbert con núcleo reproductor \mathcal{H} es un subespacio cerrado de un espacio de Hilbert $\tilde{\mathcal{H}}$. Entonces*

$$\langle f, k(\cdot, s) \rangle = P_{\mathcal{H}} f(s) \quad \text{para toda función } f \in \tilde{\mathcal{H}},$$

donde $P_{\mathcal{H}}$ denota la proyección ortogonal sobre \mathcal{H} .

Demostración. Dada $f \in \tilde{\mathcal{H}}$ escribimos $f = f_1 + f_2$ con $f_1 \in \mathcal{H}$ y $f_2 \in \mathcal{H}^\perp$, de donde

$$\langle f, k(\cdot, s) \rangle = \langle f_1 + f_2, k(\cdot, s) \rangle = \langle f_1, k(\cdot, s) \rangle + \langle f_2, k(\cdot, s) \rangle = f_1(s) = P_{\mathcal{H}} f(s),$$

ya que $f_2 \perp k(\cdot, s)$ y $f_1 \in \mathcal{H}$. \square

Supongamos que existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty$ en Ω tal que $\{k(\cdot, t_n)\}_{n=1}^\infty$ es una base ortogonal de \mathcal{H} . Existe una fórmula en \mathcal{H} que nos permite recuperar cada función $f \in \mathcal{H}$ a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(t_n)\}_{n=1}^\infty$:

Proposición 3.7. (Fórmula de muestreo en un RKHS)

Supongamos que la sucesión $\{k(\cdot, t_n)\}_{n=1}^\infty$ es base ortogonal de \mathcal{H} para cierta sucesión $\{t_n\}_{n=1}^\infty \subset \Omega$. Entonces, para cada $f \in \mathcal{H}$ se verifica la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{k(t, t_n)}{k(t_n, t_n)}, \quad t \in \Omega. \quad (3.2)$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en subconjuntos de Ω en donde la función $t \mapsto k(t, t)$ esté acotada.

Demostración. En primer lugar, normalizamos la sucesión $\{k(\cdot, t_n)\}_{n=1}^\infty$ dividiendo cada elemento por su norma $\|k(\cdot, t_n)\| = \sqrt{k(t_n, t_n)}$. Dada $f \in \mathcal{H}$, la desarrollamos en la base ortonormal $\left\{ k(\cdot, t_n) / \sqrt{k(t_n, t_n)} \right\}_{n=1}^\infty$ obteniendo

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, k(\cdot, t_n) / \sqrt{k(t_n, t_n)} \rangle k(\cdot, t_n) / \sqrt{k(t_n, t_n)} = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{k(\cdot, t_n)}{k(t_n, t_n)} \quad \text{en } \mathcal{H}.$$

El resultado sobre la convergencia uniforme se obtiene de la proposición 3.5. La convergencia absoluta se deduce del hecho de que la convergencia de la serie (3.2) es incondicional: una base ortonormal lo es independientemente del orden de sus elementos (véase la nota posterior a la definición 1.3). \square

Veamos tres ejemplos importantes de RKHS que ilustran las propiedades obtenidas anteriormente.

Ejemplo 3.1. El espacio $\ell^2(\mathbb{N})$ con su producto interno estándar

Toda sucesión $\mathbf{a} \in \ell^2(\mathbb{N})$ puede considerarse una función definida en $\Omega := \mathbb{N}$. Trivialmente, los funcionales evaluación son acotados ya que se cumple que, para cada $m \in \mathbb{N}$, $|a_m| \leq \|\mathbf{a}\|_2$. Por lo tanto, el espacio de sucesiones $\ell^2(\mathbb{N})$ con su producto interno estándar es un RKHS. Sabemos que $\{\mathbf{e}_n\}_{n=1}^\infty$, con $\mathbf{e}_n = \{\delta_{n,k}\}_{k=1}^\infty$, es una base ortonormal de $\ell^2(\mathbb{N})$; su núcleo reproductor será

$$k(m, n) = \langle \mathbf{e}_n, \mathbf{e}_m \rangle = \delta_{m,n} \quad (\text{delta de Kronecker}).$$

Este ejemplo pone de manifiesto que los operadores unitarios (isometrías lineales biyectivas) no conservan la estructura de espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Nótese que el espacio de Hilbert $L^2[0, 1]$ no es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor; ni tan siquiera tiene sentido hablar de los funcionales evaluación en él.

Ejemplo 3.2. El espacio de Hardy en el disco unidad

Sea $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ el disco unidad en el plano complejo; el espacio de Hardy en el disco D se define como las funciones analíticas en D cuyos coeficientes de Taylor alrededor de $z = 0$ pertenecen a $\ell^2(\mathbb{N}_0)$, siendo $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es decir,

$$H^2(D) := \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{C} : f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \text{ con } \{c_n\}_{n=0}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{N}_0) \right\}.$$

El espacio $H^2(D)$ es un espacio de Hilbert dotado del producto interno:

$$\langle f, g \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \overline{b_n} \text{ donde } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \text{ y } g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n.$$

Así, el operador

$$U : \ell^2(\mathbb{N}_0) \longrightarrow H^2(D)$$

$$\{c_n\}_{n=0}^{\infty} \longmapsto U(\{c_n\}_{n=0}^{\infty}) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$

es un operador unitario. Como $U(\mathbf{e}_n) = z^n$, $n \in \mathbb{N}_0$, se obtiene que la sucesión de monomios $\{z^n : |z| < 1\}_{n=0}^{\infty}$ es una base ortonormal del espacio $H^2(D)$.

Además, el espacio $H^2(D)$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor ya que, para cada $\beta \in D$, el funcional evaluación en β se escribe, para cada $f \in H^2(D)$,

como $f(\beta) = \langle f, k_\beta \rangle$ donde $k_\beta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{\beta}^n z^n$. Su núcleo reproductor, por la proposición 3.3, es

$$k(z, w) = \langle k_w, k_z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{w}^n z^n = \frac{1}{1 - z\bar{w}} \quad (\text{núcleo de Szegő}).$$

Ejemplo 3.3. Los polinomios trigonométricos de grado $\leq N$

El espacio de los polinomios trigonométricos de periodo 2π y grado $\leq N$ se define como

$$\mathcal{T}_N := \left\{ \sum_{k=-N}^N c_k e^{ikt} : \{c_k\} \in \mathbb{C}^{2N+1} \right\}.$$

El espacio \mathcal{T}_N es un subespacio de dimensión $2N+1$ del espacio de Hilbert $L^2[-\pi, \pi]$, del cual hereda su producto interno. Las funciones $\{e^{ikt}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-N}^N$ forman una base ortonormal de \mathcal{T}_N . Como en los espacios de dimensión finita todos los operadores lineales son acotados, el espacio \mathcal{T}_N es un RKHS. Utilizando la proposición 3.3, su núcleo reproductor vendrá dado por

$$k_N(t, s) = \sum_{k=-N}^N \frac{e^{ikt}}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-iks}}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ik(t-s)} = D_N(t-s),$$

donde D_N denota el núcleo de Dirichlet N -ésimo (véase la proposición 1.8).

Para cada $f \in L^2[-\pi, \pi]$, utilizando la proposición 3.6 se obtiene que

$$\langle f, k_N(\cdot, s) \rangle = S_N(s),$$

donde S_N denota la suma parcial N -ésima de la serie de Fourier de f respecto de la base ortonormal $\{e^{ikt}/\sqrt{2\pi}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ de $L^2[-\pi, \pi]$.

Veamos ahora cómo se obtiene, utilizando la proposición 3.7, una fórmula interpolatoria para los polinomios trigonométricos ya conocida por Cauchy en 1841. En este caso, necesitamos una sucesión de puntos $\{t_n\}_{n=-N}^N$ en $[-\pi, \pi]$ tal que

$$\langle k_N(\cdot, t_n), k_N(\cdot, t_m) \rangle = k_N(t_m, t_n) \delta_{n,m}.$$

Observando la expresión del núcleo N -ésimo de Dirichlet de la proposición 1.9

$$k_N(t, s) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\text{sen} \left[\left(N + \frac{1}{2} \right) (t-s) \right]}{\text{sen} \frac{1}{2} (t-s)} & \text{si } t-s \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z} \\ \frac{2N+1}{2\pi} & \text{si } t-s \in 2\pi\mathbb{Z}, \end{cases}$$

bastaría escoger los puntos $t_n = \frac{2\pi n}{2N+1}$, $-N \leq n \leq N$, para los que

$$k_N(t_m, t_n) = \frac{1}{2\pi} (2N+1) \delta_{m,n}.$$

$$p(t) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N p\left(\frac{2\pi n}{2N+1}\right) \frac{\text{sen} \left[\left(\frac{2N+1}{2} \right) \left(t - \frac{2\pi n}{2N+1} \right) \right]}{\text{sen} \frac{1}{2} \left(t - \frac{2\pi n}{2N+1} \right)}, \quad t \in [-\pi, \pi].$$

3.2. Espacios de Paley-Wiener

Un ejemplo de espacio RKHS de especial relevancia está constituido por las funciones de $L^2(\mathbb{R})$ bandalimitadas a un cierto intervalo centrado en el origen $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$. Decimos que una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ es **bandalimitada** (o **de banda limitada**) al intervalo $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$ si su transformada de Fourier \hat{f} se anula fuera de dicho intervalo (en lo que sigue, notaremos la transformada de Fourier de $f \in L^2(\mathbb{R})$ como \hat{f} o $\mathcal{F}f$ indistintamente). Estas funciones, básicas en teoría de la señal, modelizan señales de energía finita que no contienen frecuencias superiores a $\sigma/2$ ciclos por segundo. A lo largo de la sección supondremos que $\sigma = 1$.

En la literatura matemática, el espacio de funciones bandalimitada al intervalo $[-\pi, \pi]$, recibe el nombre de **espacio de Paley-Wiener** y se denota por PW_π . Es decir

$$PW_\pi := \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) : \hat{f} \equiv 0 \text{ fuera de } [-\pi, \pi] \right\}.$$

El espacio PW_π es un subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$ ya que

$$PW_\pi = \mathcal{F}^{-1}(L^2[-\pi, \pi]),$$

en donde se ha identificado el espacio $L^2[-\pi, \pi]$ con el subespacio cerrado de $L^2(\mathbb{R})$ que resulta de extender a todo \mathbb{R} , por 0, las funciones de $L^2[-\pi, \pi]$, y la transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} es un operador unitario en $L^2(\mathbb{R})$.

Dada $f \in PW_\pi$, utilizando la transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} se obtiene la representación:

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(w) e^{iwt} dw = \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-iwt}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (3.3)$$

de donde, aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la igualdad de Parseval $\|f\| = \|\hat{f}\|$, se obtiene, para cada $t \in \mathbb{R}$, que

$$|f(t)| \leq \|\hat{f}\| \left\| \frac{e^{-iwt}}{\sqrt{2\pi}} \right\| = \|f\|, \quad f \in PW_\pi.$$

Por tanto, el espacio PW_π es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Su núcleo reproductor es $k_\pi(t, s) = \frac{\text{sen } \pi(t-s)}{\pi(t-s)}$ ya que por el teorema de Plancherel-Parseval 2.7 se tiene que

$$f(s) = \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-iws}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]} = \left\langle f, \frac{\text{sen } \pi(\cdot - s)}{\pi(\cdot - s)} \right\rangle, \quad s \in \mathbb{R},$$

donde hemos utilizado que

$$\mathcal{F}^{-1} \left(\frac{e^{-iws}}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(w) \right) (t) = \frac{\text{sen } \pi(t-s)}{\pi(t-s)}.$$

Como la sucesión $\left\{ \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ es una base ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$ y \mathcal{F}^{-1} un operador unitario, deducimos que:

Corolario 3.1. *La sucesión formada por los trasladados en los enteros de la función seno cardinal, $\left\{ \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, es una base ortonormal del espacio de Paley-Wiener PW_{π} .*

Teniendo en cuenta que $k_{\pi}(t, t) = 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$, la proposición 3.7 nos proporciona, en este caso, el famoso teorema de muestreo de Shannon:

Teorema 3.1. (Teorema de muestreo de Shannon)

Toda función $f \in PW_{\pi}$, es decir, bandalimitada al intervalo $[-\pi, \pi]$, puede recuperarse a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ mediante la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en \mathbb{R} .

Otra demostración de teorema anterior, es la siguiente: dada una función $f \in PW_{\pi}$, desarrollamos su transformada de Fourier $\hat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$ con respecto a la base ortonormal $\left\{ \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de $L^2[-\pi, \pi]$ obteniendo:

$$\hat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi].$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} se obtiene

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{e^{-inw}}{\sqrt{2\pi}} \chi_{[-\pi, \pi]}(w) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}).$$

Teniendo en cuenta que PW_{π} es un RKHS, de la proposición 3.5 se obtiene de nuevo la tesis del teorema de muestreo de Shannon.

La fórmula de muestreo de Shannon es un desarrollo ortonormal en el espacio PW_{π} con respecto a la base $\left\{ \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$. La identidad de Parseval correspondiente al desarrollo (3.4) nos dice que

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n)|^2 \quad \text{para todo } f \in PW_{\pi},$$

es decir, toda la energía $E_f := \|f\|^2$ de la señal bandalimitada $f \in PW_{\pi}$ está contenida en la sucesión de sus muestras $\{f(n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$.

La transformada de Fourier es un operador unitario entre los espacios de Hilbert PW_π y $L^2[-\pi, \pi]$ que denominaremos **dualidad de Fourier**: mediante los operadores \mathcal{F} o \mathcal{F}^{-1} podemos relacionar desarrollos ortonormales entre ambos espacios.

El siguiente diagrama conmutativo, donde todos los operadores son unitarios, nos da una interpretación de la dualidad de Fourier que lleva implícita la fórmula de muestreo de Shannon:

$$\begin{array}{ccc}
 f \in PW_\pi & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{f} \in L^2[-\pi, \pi] \\
 \downarrow \mathcal{S} & & \downarrow \mathcal{P} \\
 \{f(n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \hat{f}_p \in L^2_p[-\pi, \pi]
 \end{array}$$

Figura 3.1: Interpretación de la dualidad de Fourier

Gráficamente:

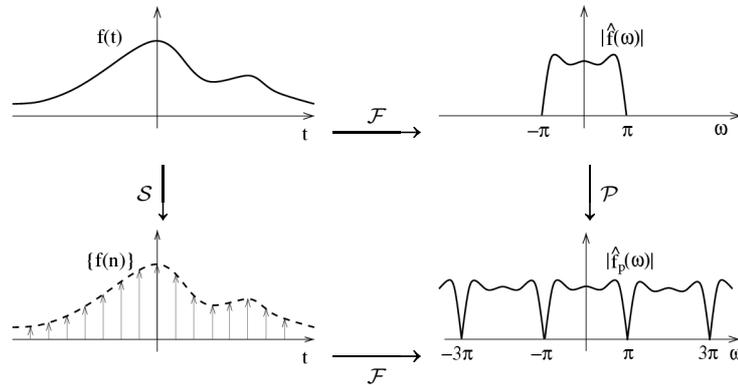


Figura 3.2: Interpretación tiempo-frecuencia del teorema de Shannon

La aplicación de la proposición 3.3 en este caso proporciona la siguiente igualdad para el núcleo reproductor de PW_π

Corolario 3.2. *Se tiene que*

$$\frac{\text{sen } \pi(t - s)}{\pi(t - s)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)} \frac{\text{sen } \pi(s - n)}{\pi(s - n)}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Como PW_π es un RKHS contenido en $L^2(\mathbb{R})$, la proposición 3.6 nos da una expresión para la proyección ortogonal de $L^2(\mathbb{R})$ sobre PW_π :

Corolario 3.3. Si $f \in L^2(\mathbb{R})$ se tiene que

$$P_{PW_\pi} f(s) = \left\langle f, \frac{\text{sen } \pi(\cdot - s)}{\pi(\cdot - s)} \right\rangle = (f * \text{senc})(s), \quad s \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 3.4. La sucesión doble $\{e^{2\pi imt} g(t - n)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$, donde $g(t) = \text{sen } \pi t / \pi t$ denota la función seno cardinal, es una base ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$. Una demostración, utilizando el teorema de muestreo de Shannon, involucra los siguientes pasos:

1. Como la transformada de Fourier de la función $e^{2\pi imt} g(t - n)$ es:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-inw} \chi_{[2\pi m - \pi, 2\pi m + \pi]}(w),$$

del teorema de Parseval-Plancherel se deduce que $\{e^{2\pi imt} g(t - n)\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ forma un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$.

2. Toda función $f \in L^2(\mathbb{R})$ se escribe como la suma ortogonal (convergente en $L^2(\mathbb{R})$)

$$f = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m \quad \text{en } L^2(\mathbb{R}),$$

donde cada f_m cumple que $\hat{f}_m = \hat{f} \chi_{[2\pi m - \pi, 2\pi m + \pi]}$. Basta observar que $\hat{f} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}_m$, siendo la suma ortogonal en $L^2(\mathbb{R})$; el resultado se obtiene aplicando la transformada de Fourier inversa.

3. Como la función $e^{-2\pi imt} f_m(t)$ es bandalimitada a $[-\pi, \pi]$, aplicando el teorema de muestreo de Shannon, se obtiene que

$$f(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi imn} f_m(n) e^{2\pi imt} \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}.$$

4. Finalmente, el resultado se deduce del teorema de la base ortonormal.

Algunos comentarios y generalizaciones sobre el teorema de muestreo

A continuación hacemos algunos comentarios y damos algunas generalizaciones sobre el teorema de muestreo de Shannon:

(a) Lo importante del teorema de muestreo anterior es que las muestras están equiespaciadas, con un periodo de muestreo $T_s = 1$ (en el caso del espacio PW_π), y no que éstas se tomen precisamente en los enteros. De hecho, toda función $f \in PW_\pi$ se puede

recuperar a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(n+a)\}_{n=-\infty}^{\infty}$, donde $a \in \mathbb{R}$ es un número fijo, mediante la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n+a) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Basta observar que la sucesión $\left\{ e^{-i(n+a)w} / \sqrt{2\pi} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ también es base ortonormal de $L^2[-\pi, \pi]$; mediante el operador unitario \mathcal{F}^{-1} se transforma en la base ortonormal $\left\{ \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n-a)}{\pi(t-n-a)} \right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ de PW_{π} . En este caso, la identidad de Parseval se escribe como

$$\|f\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |f(n+a)|^2 \quad \text{para todo } f \in PW_{\pi}.$$

(b) La fórmula de muestreo de Shannon es una **fórmula interpolatoria tipo-Lagrange**, ya que generaliza, al caso infinito, la conocida fórmula de interpolación polinómica de Lagrange. En efecto, como $\operatorname{sen} \pi(t-n) = \operatorname{sen} \pi t \cos \pi n - \cos \pi t \operatorname{sen} \pi n$ se tiene que

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{(-1)^n \operatorname{sen} \pi t}{\pi(t-n)} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{P(t)}{P'(n)(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

siendo $P(t) := \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi}$, $t \in \mathbb{R}$.

(c) Fórmula de muestreo en $PW_{\pi\sigma}$. A partir del resultado del teorema 3.1 es fácil deducir la fórmula de muestreo correspondiente a funciones de $L^2(\mathbb{R})$ bandalimitadas a un intervalo $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$, es decir, del espacio de Paley-Wiener $PW_{\pi\sigma}$.

Sea $f \in PW_{\pi\sigma}$, definimos la función $g(t) := f(t/\sigma)$. Como $\hat{g}(w) = \sigma \hat{f}(\sigma w)$, la función $g \in PW_{\pi}$, de donde

$$g(t) = f(t/\sigma) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\sigma) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El cambio de variable $t/\sigma = s$ proporciona la fórmula de muestreo válida para $f \in PW_{\pi\sigma}$:

$$f(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n/\sigma) \frac{\operatorname{sen} \pi(\sigma s - n)}{\pi(\sigma s - n)}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Nótese que en el espacio $PW_{\pi\sigma}$ el periodo de muestreo es $T_s = 1/\sigma$. El núcleo reproductor del espacio $PW_{\pi\sigma}$ es la función

$$k_{\pi\sigma}(t, s) = \sigma \operatorname{senc} \sigma(t-s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(d) Fórmula de muestreo cuando el intervalo de frecuencias no es simétrico respecto del origen. El hecho de tomar el intervalo de frecuencias $[-\pi, \pi]$ simétrico respecto al origen se debe a que es lo que les ocurre a las señales bandalimitada que toman valores reales. En efecto, si f es una función que toma valores reales, se cumple que $\widehat{f}(w) = \widehat{f}(-w)$, de donde resulta que $|f(w)|^2 = \widehat{f}(w)\widehat{f}(w) = \widehat{f}(w)\widehat{f}(-w)$ es una función par.

A partir del teorema 3.1 es fácil deducir la fórmula de muestreo válida para funciones de $L^2(\mathbb{R})$ bandalimitada a un intervalo $[w_0 - \pi, w_0 + \pi]$. En efecto, si f es una función de este tipo, la función $g(t) := e^{-iw_0 t} f(t)$ es bandalimitada al intervalo $[-\pi, \pi]$ ya que $\widehat{g}(w) = \widehat{f}(w + w_0)$, de donde

$$g(t) = e^{-iw_0 t} f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iw_0 n} f(n) \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

resultando, finalmente, la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{iw_0(t-n)} \frac{\text{sen } \pi(t - n)}{\pi(t - n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(e) El espacio PW_π como un espacio de Hilbert de funciones enteras. Toda función $f \in PW_\pi$ puede extenderse al plano complejo mediante la expresión:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \widehat{f}(w) e^{izw} dw, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Procediendo como en el ejemplo 2.10, se prueba que f es una función entera, es decir, holomorfa en todo \mathbb{C} . Además, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, para $z = x + iy \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$|f(x + iy)| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(w)| e^{-yw} dw \leq \frac{e^{\pi|y|}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} |\widehat{f}(w)| dw \leq e^{\pi|z|} \|f\|,$$

es decir, f es una función de tipo exponencial π . El teorema de Paley-Wiener, cuya prueba esbozamos a continuación, nos dice que estas propiedades junto con el hecho de pertenecer f a $L^2(\mathbb{R})$ caracterizan totalmente al espacio PW_π :

Teorema 3.2. (Teorema de Paley-Wiener)

Si f es una función entera tal que $|f(z)| \leq Ce^{\pi|z|}$, para $z \in \mathbb{C}$, y $f|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$, entonces existe una función $F \in L^2[-\pi, \pi]$ tal que

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(w) e^{-izw} dw, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Demostración. Como $f|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$, existirá $F \in L^2(\mathbb{R})$ tal que, en el sentido de $L^2(\mathbb{R})$, se cumple

$$F(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-itw} dt \quad \text{y} \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{itw} dw.$$

Veamos que F se anula en casi todo punto fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$. Para ello, para w fijo y $T > 0$ definimos

$$I_w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\gamma_T} f(z) e^{-izw} dz,$$

donde γ_T es la parte superior del rectángulo $[-T, T] \times [0, T]$. Aplicando el teorema de Cauchy se tiene que

$$I_w = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T f(t) e^{-itw} dt.$$

Si demostramos que $I_w \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$ para $|w| > \pi$, el teorema estará probado ya que, como

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T}^T f(t) e^{-itw} dt \longrightarrow F(w) \quad \text{cuando } T \rightarrow \infty \text{ en } L^2(\mathbb{R}),$$

se deduciría que F se anula en casi todo punto fuera del intervalo $[-\pi, \pi]$.

Supongamos en primer lugar que $w < -\pi$. Calculando la integral que nos define I_w en cada uno de los tres trozos de γ_T tendremos que:

$$\begin{aligned} |\sqrt{2\pi} I_w| &\leq \int_0^T |f(T + iy)| e^{wy} dy + e^{wT} \int_{-T}^T |f(x + iT)| dx \\ &\quad + \int_0^T |f(-T + iy)| e^{wy} dy \equiv I_{w1} + I_{w2} + I_{w3}. \end{aligned}$$

Para demostrar que $I_{wi} \rightarrow 0$ cuando $T \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, 3$, utilizaremos algunos resultados sobre funciones enteras de tipo exponencial relacionados con el teorema de Phragmen-Lindelöf (véase [25, p. 68]) que nos dice que si una función continua en un sector cerrado de \mathbb{C} y analítica en el sector abierto está acotada en la frontera y no crece demasiado rápido en el interior, entonces está acotada en todo el sector. Concretamente, se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si f es entera de tipo exponencial y $f|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})$, entonces $f(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$ (véase [25, p. 83]).
2. Se cumple que $|f(x + iy)| \leq M e^{\pi|y|}$ siendo $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in \mathbb{R}$ (véase [25, p. 70]).

3. De 1. y del teorema de Montel [17] se deduce que $f(x + iy) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, uniformemente en bandas horizontales de \mathbb{C} (véase [25, p. 71]).

En primer lugar, utilizando la propiedad 2), se tiene que $I_{w2} \leq 2TM e^{(w+\pi)T}$, que tiende a 0 cuando $T \rightarrow \infty$ ya que $w < -\pi$.

Estudiemos ahora I_{w1} (el caso I_{w3} se haría igual). Para $0 < R < T$ escribimos

$$I_{w1} = \left(\int_0^R + \int_R^T \right) |f(T + iy)| e^{wy} dy.$$

Para $0 \leq y \leq R$ se tiene, por la propiedad 3), que

$$\int_0^R |f(T + iy)| e^{wy} dy \rightarrow 0 \quad \text{cuando } T \rightarrow \infty.$$

Finalmente, utilizando la propiedad 2)

$$\int_R^T |f(T + iy)| e^{wy} dy \leq M \int_R^T e^{(w+\pi)y} dy = \frac{M}{w + \pi} (e^{(w+\pi)T} - e^{(w+\pi)R}) \rightarrow 0$$

cuando $T, R \rightarrow \infty$ ya que $w + \pi < 0$.

Para $w > \pi$ se hace de manera análoga escogiendo γ en el semiplano inferior. \square

Por lo tanto, $PW_\pi \equiv \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : |f(z)| \leq Ae^{\pi|z|}, \quad f|_{\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R}) \right\}$. Considerado el espacio PW_π como un RKHS de funciones enteras, su núcleo reproductor es

$$k_\pi(z, w) = \text{senc}(z - \bar{w}), \quad z, w \in \mathbb{C},$$

ya que

$$f(w) = \left\langle \hat{f}, \frac{e^{-i\bar{w}\cdot}}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle_{L^2[-\pi, \pi]} = \left\langle f, \frac{\text{sen } \pi(\cdot - \bar{w})}{\pi(\cdot - \bar{w})} \right\rangle_{L^2(\mathbb{R})} \quad \text{para } w \in \mathbb{C}.$$

(f) Muestreo de señales pasobanda. El objetivo en este apartado es obtener una fórmula de muestreo para toda **función de pasobanda**, es decir, una función $f \in L^2(\mathbb{R})$ cuya transformada de Fourier \hat{f} se anula fuera del conjunto $[-w_0 - \pi, -w_0] \cup [w_0, w_0 + \pi]$, que toma valores reales, utilizando las sucesiones de muestras $\{f(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de la propia f y $\{\tilde{f}(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de su transformada de Hilbert \tilde{f} . Para ello seguimos los siguientes pasos:

La señal analítica f_a asociada a f (véase la sección 2.3) será bandalimitada al intervalo $[w_0, w_0 + \pi]$. Como

$$f_a(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{w_0}^{w_0 + \pi} 2\hat{f}(w) e^{iwt} dw, \quad t \in \mathbb{R},$$

de la propiedades **(c)** y **(d)** anteriores se obtiene que

$$f_a(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_a(2n) e^{iw_1(t-2n)} \frac{\operatorname{sen} \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $(w_1 = w_0 + \frac{\pi}{2})$.

Como $f = \operatorname{Re} f_a$, se deduce la siguiente fórmula de muestreo para f :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{f(2n) \cos w_1(t-2n) - \tilde{f}(2n) \operatorname{sen} w_1(t-2n)\} \frac{\operatorname{sen} \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

En particular, para $f \in PW_\pi$ real, como $w_0 = 0$, se cumple que

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{f(2n) \cos \frac{\pi}{2}(t-2n) - \tilde{f}(2n) \operatorname{sen} \frac{\pi}{2}(t-2n)\} \frac{\operatorname{sen} \pi(\frac{t}{2} - n)}{\pi(\frac{t}{2} - n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(g) Muestreo irregular: Teorema de Paley-Wiener-Levinson. Si $\{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de números reales tales que $D := \sup_{n \in \mathbb{Z}} |t_n - n| < 1/4$, sabemos, por el teorema 1/4 de Kadec (véase el corolario 1.4), que la sucesión $\{e^{-it_n w} / \sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz en $L^2[-\pi, \pi]$. De manera equivalente, utilizando la dualidad de Fourier, la sucesión $\left\{ \frac{\operatorname{sen} \pi(t - t_n)}{\pi(t - t_n)} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$ será una base de Riesz en PW_π . Consideremos $\{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base dual de $\{e^{-it_n w} / \sqrt{2\pi}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ en $L^2[-\pi, \pi]$. Dada $f \in PW_\pi$, si desarrollamos su transformada de Fourier $\hat{f} \in L^2[-\pi, \pi]$ respecto de las bases duales anteriores obtenemos

$$\hat{f} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \hat{f}, e^{-it_n w} / \sqrt{2\pi} \rangle h_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) h_n \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi].$$

Aplicando la transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} se obtiene la siguiente fórmula de muestreo en PW_π

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t_n) (\mathcal{F}^{-1} h_n)(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

El problema radica en calcular las funciones $(\mathcal{F}^{-1} h_n)(t)$. Mediante técnicas de funciones enteras, Paley-Wiener-Levinson hallaron (véase [25]) que

$$(\mathcal{F}^{-1} h_n)(t) = \frac{G(t)}{(t - t_n) G'(t_n)} \quad \text{donde} \quad G(t) = (t - t_0) \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t}{t_n}\right) \left(1 - \frac{t}{t_{-n}}\right).$$

En otras palabras, se obtiene de nuevo una fórmula de muestreo interpolatoria tipo-Lagrange. Una consecuencia del resultado anterior es que las sucesiones

$$\left\{ \frac{\operatorname{sen} \pi(t - t_n)}{\pi(t - t_n)} \right\}_{n \in \mathbb{Z}} \quad \text{y} \quad \left\{ \frac{G(t)}{(t - t_n) G'(t_n)} \right\}_{n \in \mathbb{Z}}$$

forman un par de bases de Riesz duales en el espacio PW_π .

(h) Muestreo con derivadas. A continuación demostramos cómo se puede recuperar cualquier función $f \in PW_\pi$ usando sus muestras $\{f(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, junto con las muestras $\{f'(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de su derivada.

Teorema 3.3. *Cualquier función $f \in PW_\pi$ puede recuperarse a partir de las muestras $\{f(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ y $\{f'(2n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mediante la fórmula*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{f(2n) + (t - 2n)f'(2n)\} \left[\frac{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2}(t - 2n)}{\frac{\pi}{2}(t - 2n)} \right]^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demostración. Sea $F \in L^2[-\pi, \pi]$ la transformada de Fourier de f . Se cumplen los siguientes desarrollos de Fourier en $L^2[-\pi, \pi]$

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{y} \quad F(\omega - \pi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n f(n) \frac{e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Como consecuencia, la función $S(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega) + F(\omega - \pi)]$ admite el desarrollo de Fourier

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(2n) \frac{e^{-i2n\omega}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[0, \pi].$$

Análogamente, puesto que

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} i\omega F(\omega) e^{it\omega} d\omega,$$

se obtienen los desarrollos de Fourier

$$i\omega F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(n) \frac{e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi].$$

Por tanto, la función $R(\omega) = \frac{i}{2}[\omega F(\omega) + (\omega - \pi)F(\omega - \pi)]$ admite el desarrollo en serie de Fourier

$$R(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f'(2n) \frac{e^{-i2n\omega}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[0, \pi].$$

Juntando ambos desarrollos, para $\omega \in [0, \pi]$, se tiene que

$$\begin{pmatrix} S(\omega) \\ R(\omega) \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i\omega & i(\omega - \pi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(\omega) \\ F(\omega - \pi) \end{pmatrix},$$

o invirtiendo la matriz

$$\begin{pmatrix} F(\omega) \\ F(\omega - \pi) \end{pmatrix} = \frac{2i}{\pi} \begin{pmatrix} i(\omega - \pi) & -1 \\ -i\omega & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S(\omega) \\ R(\omega) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Introduciendo la descomposición de F en la expresión de f , después de algunos cálculos se obtiene

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega) e^{it\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} (\omega + \pi) f(2n) + \frac{2i}{\pi} f'(2n) \right] \frac{e^{-i2n\omega}}{\sqrt{2\pi}} e^{it\omega} d\omega \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{2}{\pi} (\pi - \omega) f(2n) - \frac{2i}{\pi} f'(2n) \right] \frac{e^{-i2n\omega}}{\sqrt{2\pi}} e^{it\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{|\omega|}{\pi}\right) f(2n) e^{i(t-2n)\omega} d\omega \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-i \operatorname{sgn} \omega)}{\sqrt{2\pi}} f'(2n) e^{i(t-2n)\omega} d\omega \right\}. \end{aligned}$$

El resultado final se deduce utilizando los pares de Fourier (véase, por ejemplo, [15, p. 203])

$$\operatorname{senc} \left(\frac{t}{2} \right) \operatorname{sen} \left(\frac{\pi t}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(-i \operatorname{sgn} \omega)}{\sqrt{2\pi}} e^{it\omega} d\omega$$

y

$$\operatorname{senc}^2 \left(\frac{t}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(1 - \frac{|\omega|}{\pi}\right) e^{it\omega} d\omega.$$

□

Submuestreo y sobremuestreo: Aplicación de la fórmula sumatoria de Poisson

Si muestreamos una función f en PW_{π} con un periodo de muestreo $T_s > 0$, nos planteamos si es posible recuperar f a partir de la sucesión de muestras $\{f(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Como una aplicación de la fórmula sumatoria de Poisson veamos que muestrear una función $f \in PW_{\pi}$ con un periodo de muestreo T_s equivale a periodizar su espectro \hat{f} con un periodo $2\pi/T_s$. En efecto, consideremos la sucesión de muestras $\{\hat{f}(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ tomadas de la función $f \in PW_{\pi}$ con periodo de muestreo $T_s > 0$. Sea \hat{f}_p la versión $\frac{2\pi}{T_s}$ -periodizada de \hat{f} , es decir,

$$\hat{f}_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}\left(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n\right).$$

Obviamente, \hat{f}_p es una función $\frac{2\pi}{T_s}$ -periódica. A continuación calculamos su desarrollo en serie de Fourier respecto de la base ortonormal estándar $\{\sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} e^{-imT_s\omega}\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de $L^2[0, \frac{2\pi}{T_s}]$. El coeficiente de Fourier c_m , $m \in \mathbb{Z}$, viene dado por

$$\begin{aligned} c_m &= \sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} \int_0^{\frac{2\pi}{T_s}} \hat{f}_p(\omega) e^{imT_s\omega} d\omega = \sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} \int_0^{\frac{2\pi}{T_s}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n) e^{imT_s\omega} d\omega \\ &= \sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^{\frac{2\pi}{T_s}} \hat{f}(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n) e^{imT_s\omega} d\omega \end{aligned}$$

El cambio de variable $\omega + \frac{2\pi}{T_s}n = x$ nos permite obtener

$$\begin{aligned} c_m &= \sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{\frac{2\pi}{T_s}n}^{\frac{2\pi}{T_s}(n+1)} \hat{f}(x) e^{imT_sx} dx = \sqrt{\frac{T_s}{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \hat{f}(x) e^{imT_sx} dx \\ &= \sqrt{T_s} f(mT_s) \end{aligned}$$

Por tanto, el desarrollo de Fourier de \hat{f}_p es:

$$\hat{f}_p(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega + \frac{2\pi}{T_s}n) = T_s \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(mT_s) \frac{e^{-imT_s\omega}}{\sqrt{2\pi}}.$$

De la expresión anterior, que no es sino la fórmula sumatoria de Poisson aplicada a la función \hat{f} con periodo $2\pi/T_s$, se deduce que:

El espectro de la sucesión $\{f(mT_s)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, es decir, de la función muestreada, es precisamente (salvo constante multiplicativa) la versión $\frac{2\pi}{T_s}$ -periodizada del espectro \hat{f} de la función f .

El resultado anterior ya era conocido, desde un punto de vista experimental, por el ingeniero Nyquist. Por ello, el periodo de muestreo crítico dado por el teorema de Shannon ($T_s = 1/\sigma$ para el espacio $PW_{\pi\sigma}$) recibe el nombre de periodo Nyquist (o frecuencia Nyquist para σ).

Como consecuencia, en el caso de **sobremuestreo**, donde $0 < T_s \leq 1$, podemos recuperar el espectro de f a partir del espectro de la función muestreada, y por tanto, recuperar la función f . En términos del teorema de muestreo la explicación es fácil: si una función es bandalimitada al intervalo $[-\pi, \pi]$, también lo es a cualquier intervalo $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$ con $\sigma \geq 1$. Esta situación aparece reflejada en la figura 3.3.

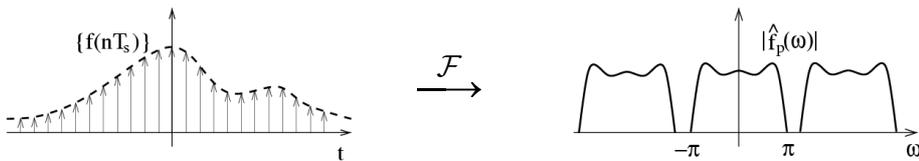


Figura 3.3: Sobremuestreo

En el caso denominado **submuestreo**, donde $T_s > 1$, no podemos obtener el espectro de f a partir de el espectro de la función muestreada ya que las copias de \hat{f} se solapan en \hat{f}_p . Por tanto, es imposible recuperar f a partir de las muestras $\{f(nT_s)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. El solapamiento aludido produce el denominado **fenómeno de aliasing**, es decir, algunas frecuencias suplantando a otras. Este es el fenómeno familiar que ocurre en las antiguas películas del oeste: a medida que la diligencia va ganando velocidad, las ruedas giran más y más rápido hasta que gradualmente van más lentas, se paran, giran al revés, se paran de nuevo, giran hacia delante, etc. Este efecto es debido al insuficiente muestreo (24 fotogramas por segundo) que la película hace de la escena real. La situación de submuestreo aparece reflejada en la figura 3.4.

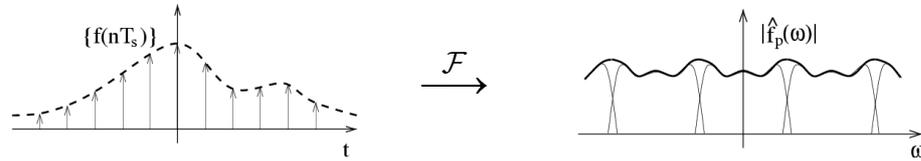


Figura 3.4: Submuestreo

Esta discusión submuestreo/sobremuestreo clarifica el papel crucial jugado por el periodo crítico de Nyquist dado por $T_s = 1/\sigma$ siempre que el intervalo $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$ sea el menor intervalo cerrado fuera del cual la función \hat{f} se anule.

Reconstrucción robusta: técnica de sobremuestreo. Los cálculos con la serie cardinal presenta algunas dificultades numéricas puesto que la función seno cardinal se comporta como $1/t$ cuando $|t| \rightarrow \infty$. Por ejemplo, si queremos calcular $f(1/2)$ a partir de la sucesión de muestras $\{f(n) + \delta_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$, el error que se comete $|\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \delta_n}{\pi(\frac{1}{2}-n)}|$, podría ser infinito incluso cuando $|\delta_n| \leq \delta$, para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Una forma de soslayar este problema es utilizando la **técnica de sobremuestreo**, es decir, utilizar una frecuencia de muestreo superior a la dictada por su ancho de banda. Así, obtenemos funciones de muestreo convergiendo a cero, cuando $|t| \rightarrow \infty$, más rápido que el seno cardinal. Consideremos la función bandalimitada

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi\sigma}^{\pi\sigma} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{con } F \in L^2[-\pi\sigma, \pi\sigma] \text{ y } \sigma < 1.$$

Extendiendo F por cero en $[-\pi, \pi] \setminus [-\pi\sigma, \pi\sigma]$, se tiene que

$$F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi].$$

Sea $\theta(\omega)$ una función regular valiendo 1 en $[-\pi\sigma, \pi\sigma]$, y 0 fuera de $[-\pi, \pi]$. Por tanto,

$$F(\omega) = \theta(\omega) F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \theta(\omega) \frac{e^{-in\omega}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en } L^2[-\pi, \pi],$$

y se cumple el desarrollo muestral

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)S_{\theta}(t-n), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $S_{\theta}(t)$ es la transformada de Fourier inversa \mathcal{F}^{-1} de la función $\theta(\omega)/\sqrt{2\pi}$. Consecuentemente, $S_{\theta}(t-n) = \mathcal{F}^{-1}[\theta(\omega)e^{-in\omega}/\sqrt{2\pi}](t)$. Además, por las propiedades de la transformada de Fourier, cuanto más regular sea θ , más rápido es el decaimiento a cero de S_{θ} cuando $|t| \rightarrow \infty$. Sin embargo, las nuevas funciones muestrales $\{S_{\theta}(t-n)\}_{n=-\infty}^{\infty}$ no forman un sistema ortogonal.

Ejemplo 3.5. A modo de ejemplo, sea $\sigma = 1 - \epsilon$ con $0 < \epsilon < 1$, y tomemos como $\theta(\omega)$ la función trapezoidal:

$$\theta(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\omega| \leq \pi(1 - \epsilon), \\ \frac{1}{\epsilon} \left(1 - \frac{|\omega|}{\pi}\right) & \text{si } \pi(1 - \epsilon) \leq |\omega| \leq \pi, \\ 0 & \text{si } |\omega| \geq \pi. \end{cases}$$

Se puede comprobar fácilmente que $S_{\theta}(t) = \frac{\text{sen } \epsilon\pi t}{\epsilon\pi t} \frac{\text{sen } \pi t}{\pi t}$, $t \in \mathbb{R}$. En este caso, la función S_{θ} se comporta como $1/t^2$ cuando $|t| \rightarrow \infty$. El desarrollo muestral correspondiente es:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\text{sen } \epsilon\pi(t-n)}{\epsilon\pi(t-n)} \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si cada muestra $f(n)$ está sometida a un error δ_n , con $|\delta_n| \leq \delta$, entonces, el error total en el cálculo de $f(t)$ está acotado por una constante que sólo depende de δ y de ϵ (véase [20, p. 211]).

Otros RKHS en los que se cumple una fórmula de muestreo

La teoría de muestreo en los espacios de Paley-Wiener se generaliza, de manera inmediata, mediante la siguiente construcción. Sea \mathcal{H} un espacio de Hilbert separable y sea $K : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{H}$ una aplicación valorada en \mathcal{H} . Supongamos que existe una sucesión $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ en \mathbb{R} tal que la correspondiente sucesión $\{K(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ forma una base ortogonal para \mathcal{H} . Bajo estas condiciones:

1. Si definimos el conjunto de funciones

$$\mathcal{H}_K := \{f_x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} : f_x(t) = \langle x, K(t) \rangle_{\mathcal{H}} \text{ con } x \in \mathcal{H}\},$$

la aplicación $\mathcal{T}_K : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}_K$ definida como $\mathcal{T}_K(x) = f_x$ es lineal y biyectiva. Para la inyectividad, supongamos que $f_x = 0$ en \mathcal{H}_K . En particular,

$$f_x(t_n) = 0 = \langle x, K(t_n) \rangle_{\mathcal{H}} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N},$$

lo que implica que $x = 0$ por la completitud de la sucesión $\{K(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$.

2. El espacio \mathcal{H}_K dotado del producto interno $\langle f_x, f_y \rangle_{\mathcal{H}_K} := \langle x, y \rangle_{\mathcal{H}}$ es un espacio de Hilbert con núcleo reproductor. Para cada $t \in \mathbb{R}$, el funcional evaluación en t está acotado; por la desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|f_x(t)| = |\langle x, K(t) \rangle_{\mathcal{H}}| \leq \|x\|_{\mathcal{H}} \|K(t)\|_{\mathcal{H}} = \|f_x\|_{\mathcal{H}_K} \|K(t)\|_{\mathcal{H}}, \quad f \in \mathcal{H}_K.$$

Además, la aplicación \mathcal{T}_K es, obviamente, un operador unitario entre los espacios \mathcal{H} y \mathcal{H}_K . El núcleo reproductor del espacio \mathcal{H}_K viene dado por

$$k(t, s) = \langle K(s), K(t) \rangle_{\mathcal{H}}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

En efecto, para cada $s \in \mathbb{R}$ fijo, la función $k(\cdot, s) = \mathcal{T}_K(K(s))$ pertenece a \mathcal{H}_K , y se cumple la propiedad reproductora

$$f_x(s) = \langle x, K(s) \rangle_{\mathcal{H}} = \langle \mathcal{T}_K(x), \mathcal{T}_K(K(s)) \rangle_{\mathcal{H}_K} = \langle f_x, k(\cdot, s) \rangle_{\mathcal{H}_K}, \quad s \in \mathbb{R}, \quad f_x \in \mathcal{H}_K.$$

3. Dado $x \in \mathcal{H}$, su desarrollo respecto de la base ortonormal $\{K(t_n)/\|K(t_n)\|\}_{n=1}^{\infty}$ es

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, K(t_n) \rangle_{\mathcal{H}} \frac{K(t_n)}{\|K(t_n)\|^2} \quad \text{en } \mathcal{H}.$$

Por tanto, la función de \mathcal{H}_K dada por $f(t) = \langle x, K(t) \rangle_{\mathcal{H}}$, $t \in \mathbb{R}$, satisface la fórmula de muestreo (omitimos el subíndice x de la función f)

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle x, K(t) \rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, K(t_n) \rangle_{\mathcal{H}} \frac{K(t_n)}{\|K(t_n)\|^2}, K(t) \right\rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{\langle K(t_n), K(t) \rangle_{\mathcal{H}}}{\|K(t_n)\|^2}, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en subconjuntos de \mathbb{R} en donde la función $t \mapsto \|K(t)\|_{\mathcal{H}}$ esté acotada. El teorema de muestreo anterior es una versión abstracta del denominado teorema de Kramer (véase [15]). Compárese con la fórmula de muestreo (3.2) obtenida anteriormente.

Algunos ejemplos de la construcción anterior, sin ánimo de ser exhaustivos, son los siguientes (véanse los detalles omitidos en [11]):

(i) Para el espacio de Hilbert $\mathcal{H} := L^2[0, \pi]$ y el núcleo $K_c(t)(w) := \cos tw$ que pertenece a $L^2[0, \pi]$ para cada $t \in \mathbb{R}$ fijo, consideramos la sucesión $\{t_n\} = \{0\} \cup \mathbb{N}$. Entonces, toda función f definida como

$$f(t) = \langle F, K_c(t) \rangle_{L^2[0, \pi]} = \int_0^{\pi} F(w) \cos tw \, dw, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F \in L^2[0, \pi]$, se puede recuperar mediante la fórmula de muestreo

$$f(t) = f(0) \frac{\operatorname{sen} \pi t}{\pi t} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{(-1)^n t \operatorname{sen} \pi t}{t^2 - n^2}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se puede comprobar que el núcleo reproductor del correspondiente espacio \mathcal{H}_{K_c} viene dado por

$$k_c(t, s) = \frac{1}{t^2 - s^2} [t \operatorname{sen} \pi t \cos \pi s - s \cos \pi t \operatorname{sen} \pi s], \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(ii) Análogamente, para el núcleo $K_s(t)$, definido en \mathbb{R} , con valores en $L^2[0, \pi]$, como $K_s(t)(w) := \operatorname{sen} tw$, $w \in [0, \pi]$, y la sucesión $\{t_n\} = \mathbb{N}$ se obtiene la fórmula de muestreo

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \frac{(-1)^n n \operatorname{sen} \pi t}{t^2 - n^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

para toda función de la forma

$$f(t) = \langle F, K_s(t) \rangle_{L^2[0, \pi]} = \int_0^{\pi} F(w) \operatorname{sen} tw \, dw, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F \in L^2[0, \pi]$.

Es fácil de comprobar que las funciones del ejemplo (i) coinciden con las funciones pares del espacio de Paley-Wiener PW_{π} , mientras que las funciones del ejemplo (ii) coinciden con las funciones impares de dicho espacio. Además, se cumple la descomposición en suma directa $PW_{\pi} = \mathcal{H}_{K_c} \oplus \mathcal{H}_{K_s}$.

(iii) Es conocido que la sucesión de Fourier-Bessel $\{\sqrt{w} J_{\nu}(w\lambda_n)\}_{n=1}^{\infty}$ es una base ortogonal de $L^2[0, 1]$, donde λ_n es el n -ésimo cero positivo de la función de Bessel $J_{\nu}(t)$, $\nu > -1$ (véase, por ejemplo, [15]). La función de Bessel de orden ν está dada por

$$J_{\nu}(t) = \frac{t^{\nu}}{2^{\nu} \Gamma(\nu + 1)} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(1 + \nu) \cdots (n + \nu)} \left(\frac{t}{2}\right)^{2n} \right], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $t \in \mathbb{R}$, se considera el núcleo de la transformada de Hankel $K_{\nu}(t)$ definido en \mathbb{R} , con valores en $L^2[0, 1]$, dado por $K_{\nu}(t)(w) := \sqrt{wt} J_{\nu}(wt)$, $w \in [0, 1]$, y la sucesión de ceros $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. Así, toda función f definida por

$$f(t) = \langle F, K_{\nu}(t) \rangle_{L^2[0, 1]} = \int_0^1 F(w) \sqrt{wt} J_{\nu}(wt) \, dw, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F \in L^2[0, 1]$, se puede recuperar a partir de la fórmula de muestreo

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) \frac{2\sqrt{t\lambda_n} J_{\nu}(t)}{J'_{\nu}(\lambda_n)(t^2 - \lambda_n^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

El núcleo reproductor del correspondiente espacio \mathcal{H}_ν es

$$k_\nu(s, t) = \frac{\sqrt{st}}{t^2 - s^2} [tJ_{\nu+1}(t)J_\nu(s) - sJ_{\nu+1}(s)J_\nu(t)], \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(iv) Se considera el núcleo $K(t)$, definido en \mathbb{R} , con valores en $L^2[-\pi, \pi]$, como $K(t)(w) := e^{i(t^2+w^2-wt)}$, $w \in [-\pi, \pi]$. Para la sucesión $\{t_n\} = \mathbb{Z}$ se tiene que $\{K(t_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una base ortogonal de $L^2[-\pi, \pi]$ (véase el ejemplo 1.12). Por tanto, toda función f de la forma

$$f(t) = \langle F, K(t) \rangle_{L^2[-\pi, \pi]} = \int_{-\pi}^{\pi} F(w) e^{-i(t^2+w^2-wt)} dw, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $F \in L^2[-\pi, \pi]$, se desarrolla como la serie muestral

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) e^{-i(t^2-n^2)} \frac{\text{sen } \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Se ha obtenido así una fórmula de muestreo para funciones bandalimitada al intervalo $[-\pi, \pi]$ en el sentido de la transformada de Fourier fraccionaria. La **transformada de Fourier fraccionaria** con ángulo $\alpha \notin \{0, \pi\}$ de una función $f(t)$ está definida como

$$\mathcal{F}_\alpha[f](w) := \int_{-\infty}^{\infty} f(t) K_\alpha(w, t) dt,$$

donde, salvo una constante de normalización, el núcleo integral $K_\alpha(w, t)$ está dado por

$$e^{i \frac{\cot \alpha}{2} (t^2+w^2) - i \frac{wt}{\text{sen } \alpha}}. \quad (3.6)$$

Para $\alpha = 0$ la transformada de Fourier fraccionaria está definida por $\mathcal{F}_0[f](w) = f(w)$, y para $\alpha = \pi$ por $\mathcal{F}_\pi[f](w) = f(-w)$. Cuando $\alpha = \pi/2$, el núcleo (3.6) coincide con el núcleo de Fourier. El núcleo (3.6) puede escribirse como

$$e^{ia(\alpha)[t^2+w^2-2b(\alpha)wt]},$$

donde $a(\alpha) = (\cot \alpha)/2$ y $b(\alpha) = \sec \alpha$. La fórmula de inversión de la transformada de Fourier fraccionaria está dada por

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F_\alpha(w) K_{-\alpha}(w, t) dw.$$

En el ejemplo anteriormente considerado se ha tomado $a = 1$ y $b = 1/2$.

3.3. Muestreo en un subespacio invariante por traslación de $L^2(\mathbb{R})$

El teorema WSK nos permite escribir el espacio de Paley–Wiener como:

$$PW_\pi = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \operatorname{senc}(t - n) \mid \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\},$$

es decir, el espacio PW_π es un subespacio invariante por traslación de $L^2(\mathbb{R})$, generado por la función *seno cardinal* $\operatorname{senc} t$. Aunque el teorema WSK es un resultado teórico que ha tenido un gran impacto tecnológico, presenta, desde el punto de vista práctico, los problemas que se señalan a continuación:

1. Se basa en el uso de un filtro paso-bajo ideal. Matemáticamente, se corresponde con multiplicar el espectro de la señal, i.e., su transformada de Fourier, por la función característica $\chi_{[-\pi, \pi]}$, lo que equivale en el dominio temporal a convolucionar con la función senc , que no se anula en el intervalo $(-\infty, 0)$. En la práctica no se puede construir de manera exacta tal filtro ya que ello implicaría conocer el futuro para calcular la salida del filtro en el momento actual (el filtro no es causal o físicamente realizable):

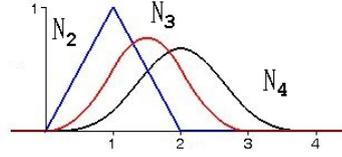
$$(f * \operatorname{senc})(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - x) \operatorname{senc} x \, dx, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. La hipótesis de ser una señal bandalimitada está en contradicción con la idea de señal de duración finita. Una función bandalimitada puede extenderse a todo el plano complejo \mathbb{C} resultando una función entera, que no podrá anularse en un intervalo de \mathbb{R} salvo que sea la función nula.
3. La operación de bandalimitar una señal genera oscilaciones de Gibbs.
4. La función *seno cardinal* decrece a cero muy lentamente lo que hace muy ineficientes los cálculos en el dominio temporal (véase la discusión de la técnica de sobremuestreo en la sección 3.2); y finalmente y relacionado con lo anterior:
5. El *seno cardinal* es una función *bien localizada* en frecuencia ya que toda su energía está concentrada en $[-\pi, \pi]$ pero, sin embargo, muy *mal localizada* en tiempo ya que $\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |\operatorname{senc} t|^2 dt = +\infty$.

Todos estos inconvenientes han llevado a estudiar los problemas de muestreo y reconstrucción en espacios invariantes por traslación donde el generador φ sea una función con mejores propiedades que el *seno cardinal*, por ejemplo, los B-splines. Se define el **B-spline de orden** $m - 1$ como

$$N_m := N_1 * N_1 * \cdots * N_1 \quad (m \text{ veces}) \quad \text{donde } N_1 := \chi_{[0,1]}.$$

Gráficamente:

Figura 3.5: B -spline lineal, cuadrático y cúbico

Para $m = 1$, la sucesión $\{N_1(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ forma un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$. Como consecuencia del lema 3.1, que se prueba a continuación, se tiene que

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_1(w + 2\pi m)|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad \text{c.t.p. en } [0, 2\pi].$$

Dada una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, se considera la función 2π -periódica

$$\Phi(w) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + 2\pi m)|^2. \quad (3.7)$$

La función Φ pertenece a $L^1[0, 2\pi]$. En efecto,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \Phi(w) dw &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |\hat{\varphi}(w + 2\pi m)|^2 dw = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 d\gamma \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(\gamma)|^2 d\gamma < \infty, \end{aligned}$$

ya que $\hat{\varphi} \in L^2(\mathbb{R})$.

Lema 3.1. Para una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, la sucesión $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es un sistema ortonormal en $L^2(\mathbb{R})$ si y sólo si se cumple la condición $\Phi(w) = \frac{1}{2\pi}$ en casi todo punto de $[0, 2\pi]$.

Demostración. En efecto, para $k \in \mathbb{Z}$ se tiene que

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \overline{\varphi(t-k)} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\varphi}(x) \overline{\hat{\varphi}(x)} e^{-ikx} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\varphi}(x)|^2 e^{ikx} dx \\ &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi m}^{2\pi(m+1)} |\hat{\varphi}(x)|^2 e^{ikx} dx = \int_0^{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + 2\pi m)|^2 e^{ikw} dw, \end{aligned}$$

para lo que hemos aplicado la identidad de Parseval y el cambio de variable $x = w + 2\pi m$. Lo anterior se cumple si y sólo si la función $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\hat{\varphi}(w + 2\pi m)|^2$ es constante, igual a $1/2\pi$, en casi todo punto del intervalo $[0, 2\pi]$. \square

Teorema 3.4. Para cada $m \geq 2$, la sucesión $\{N_m(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$.

La prueba del teorema anterior se basa en el siguiente resultado:

Lema 3.2. *Dada una función $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$, la sucesión $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$ (con constantes A y B) si y sólo si existen constantes $0 < A \leq B$ tales que $\frac{A}{2\pi} \leq \Phi(w) \leq \frac{B}{2\pi}$, en casi todo punto de $[0, 2\pi]$.*

Demostración. Demostremos la condición suficiente. Para cada sucesión finita $\{c_k\}$ se cumple que

$$\begin{aligned} \left\| \sum_k c_k \varphi(t - k) \right\|^2 &= \left\| \widehat{\sum_k c_k \varphi(t - k)} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |C(w)|^2 |\widehat{\varphi}(w)|^2 dw \\ &= \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(w + 2\pi m)|^2 dw, \end{aligned}$$

donde $C(w) := \sum_k c_k e^{-ikw}$. Por la identidad de Parseval, $\|C\|^2 = 2\pi \sum_k |c_k|^2$, de donde, finalmente, se obtiene las desigualdades

$$A \sum_k |c_k|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \varphi(t - k) \right\|^2 \leq B \sum_k |c_k|^2. \quad (3.8)$$

Por tanto, aplicando el teorema 1.12 se tiene que $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$, es decir, una base de Riesz de $\overline{\text{span}}\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Para probar la condición necesaria, si $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$ (con constantes A y B) se cumplen las desigualdades (3.8) para toda sucesión $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Ahora bien,

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(t - k) \right\|^2 = \left\| \widehat{\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \varphi(t - k)} \right\|^2 = \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 \Phi(w) dw,$$

donde $C(w) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikw} \in L^2[0, 2\pi]$. Por tanto, (3.8) se escribe como

$$\frac{A}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 dw \leq \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 \Phi(w) dw \leq \frac{B}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C(w)|^2 dw,$$

para toda función $C \in L^2[0, 2\pi]$, de donde se obtiene que $\frac{A}{2\pi} \leq \Phi(w) \leq \frac{B}{2\pi}$, en casi todo punto de $[0, 2\pi]$. Para los detalles del último paso, véase [5] o [21].

□

Demostración. (del teorema 3.4) Como $\widehat{N}_1(w) = \frac{e^{-iw/2}}{\sqrt{2\pi}} \frac{\text{sen}(w/2)}{w/2}$, se tiene que

$$\widehat{N}_m(w) = (2\pi)^{(m-1)/2} (\widehat{N}_1(w))^m = \frac{e^{-imw/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\text{sen}(w/2)}{w/2} \right)^m.$$

Como $|\hat{N}_1(w)| \leq 1$ y $\{N_1(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es sistema ortonormal de $L^2(\mathbb{R})$ se tiene que

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_m(w + 2\pi p)|^2 \leq (2\pi)^{m-1} \sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_1(w + 2\pi p)|^2 = (2\pi)^{m-2},$$

en casi todo punto de $[0, 2\pi]$. Por otra parte,

$$\sum_{p \in \mathbb{Z}} |\hat{N}_m(w + 2\pi p)|^2 \geq \inf_{w \in [-\pi, \pi]} |\hat{N}_m(w)|^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin \pi/2}{\pi/2} \right)^{2m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2m}.$$

□

Sea φ una función en $L^2(\mathbb{R})$ tal que la sucesión de sus trasladadas en los enteros $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sea una base de Riesz en $\overline{\text{span}}\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$; consideramos el espacio

$$V_\varphi^2 := \overline{\text{span}}\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \left\{ \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n) \mid \{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}.$$

Supondremos también que el generador φ es una función continua en \mathbb{R} y que la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en \mathbb{R} . Así, utilizando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se prueba que las funciones del espacio V_φ^2 son continuas en \mathbb{R} . Utilizando el teorema de Banach–Steinhaus, se prueba que que las dos condiciones anteriores son equivalentes a que el espacio V_φ^2 sea un espacio de Hilbert de funciones continuas en \mathbb{R} , es decir, la serie que define cada función en V_φ^2 converge hacia una función continua en \mathbb{R} . Este es un requisito deseable para todo espacio en el que se vaya a desarrollar una teoría de muestreo.

Teorema 3.5. *El espacio invariante por traslación V_φ^2 está formado por funciones continuas en \mathbb{R} si y sólo si el generador φ es continuo en \mathbb{R} y la serie $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2$ está uniformemente acotada en \mathbb{R} .*

Demostración. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz en la expresión $f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n \varphi(t-n)$ se obtiene, aplicando el criterio M de Weierstrass, que la serie de funciones continuas $a_n \varphi(t-n)$ converge uniformemente a la función continua f .

Para la condición suficiente, fijamos $t \in [0, 1)$ y definimos el funcional lineal

$$\begin{aligned} \Lambda_{t,N} : \quad \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ c := \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \sum_{|n| < N} c_n \varphi(t-n). \end{aligned}$$

Para cada $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que $\sup_{N \in \mathbb{N}} |\Lambda_{t,N}(c)| \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n \varphi(t-n)| < \infty$. Aplicando el teorema de Banach-Steinhaus se obtiene que

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \|\Lambda_{t,N}\| = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t-n)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

A continuación definimos el funcional lineal

$$\begin{aligned} \Lambda_t : \quad \ell^2(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ c := \{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}} &\longmapsto \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi(t - n). \end{aligned}$$

Para cada $c \in \ell^2(\mathbb{Z})$ se tiene que $\sup_{[0,1]} \left| \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \varphi(t - n) \right| < \infty$. Aplicando de nuevo el teorema de Banach-Steinhaus se obtiene, finalmente, que

$$\sup_{t \in [0,1]} \|\Lambda_t\| = \sup_{t \in [0,1]} \left\| \{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \right\|_2 = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\varphi(t - n)|^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

□

Generalización de la dualidad de Fourier: el operador \mathcal{T}_φ

Veamos que la obtención de muestreo regular en el espacio V_φ^2 involucra, en general, bases de Riesz. Para utilizar un análogo a la dualidad de Fourier de los espacios de Paley-Wiener en el espacio V_φ^2 , introducimos el operador

$$\mathcal{T}_\varphi : \quad \begin{array}{ccc} L^2[0, 1] & \longrightarrow & V_\varphi^2 \\ \{e^{-2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}} & \longmapsto & \{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \end{array}$$

que nos envía la base ortonormal $\{e^{-2\pi i n x}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2[0, 1]$ sobre la base de Riesz $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de V_φ^2 . Puesto que la sucesión $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es base de Riesz en V_φ^2 , el operador \mathcal{T}_φ así definido es acotado e invertible. Teniendo en cuenta la condición 5) del teorema de la base ortonormal, para cada $F \in L^2[0, 1]$ se obtiene que:

$$\mathcal{T}_\varphi F(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle F, e^{-2\pi i n x} \rangle \varphi(t - n) = \langle F, \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi(t - n)} e^{-2\pi i n x} \rangle = \langle F, K_t \rangle, \quad t \in \mathbb{R},$$

donde, para cada $t \in \mathbb{R}$, la función $K_t \in L^2[0, 1]$ está dada por:

$$K_t(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi(t - n)} e^{-2\pi i n x} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi(t + n)} e^{-2\pi i n x} = \overline{Z\varphi(t, x)},$$

donde $Z\varphi(t, x) := \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi(t + n) e^{-2\pi i n x}$ denota la **transformada de Zak** de la función φ . Para un estudio de las propiedades más importantes de la transformada de Zak (que no serán necesarias en lo que sigue), véase [5].

Proposición 3.8. *El espacio V_φ^2 es un RKHS. Su núcleo reproductor k se escribe como*

$$k(t, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(t - n) \overline{\tilde{\varphi}(s - n)}, \quad t, s \in \mathbb{R},$$

siendo $\{\tilde{\varphi}(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ la base de Riesz dual de $\{\varphi(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Demostración. En efecto, para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$|f(t)| \leq \|F\| \|K_t\| \leq \|\mathcal{T}_\varphi^{-1}\| \|K_t\| \|f\|, \quad f \in V_\varphi^2, \quad (3.9)$$

y por tanto los funcionales evaluación en V_φ^2 son acotados.

La expresión del núcleo reproductor se deduce de la proposición 3.4 una vez que identifiquemos cual es la base biortonormal de la base de Riesz $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Para ello, busquemos una función $\tilde{\varphi}(t) = \sum_n b_n \varphi(t-n) \in V_\varphi^2$, es decir, una sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ tal que la sucesión $\{\tilde{\varphi}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ sea biortonormal a $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Teniendo en cuenta que $\hat{\tilde{\varphi}}(w) = (\sum_n b_n e^{-inw}) \hat{\varphi}(w) = B(w) \hat{\varphi}(w)$ y procediendo como en el lema 3.1 se obtiene que

$$\begin{aligned} \delta_{0,m} &= \langle \tilde{\varphi}(t), \varphi(t-m) \rangle = \langle B(w) \hat{\varphi}(w), e^{-imw} \hat{\varphi}(w) \rangle \\ &= \int_0^{2\pi} B(w) \sum_k |\hat{\varphi}(w+2k\pi)|^2 e^{imw} dw, \end{aligned}$$

es decir, la función $B(w) \sum_k |\hat{\varphi}(w+2k\pi)|^2 = \frac{1}{2\pi}$ en casi todo punto. Por tanto, escogiendo la función

$$B(w) := \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sum_k |\hat{\varphi}(w+2k\pi)|^2},$$

que por la caracterización de las sucesiones de Riesz (véase el lema 3.2), satisface que $0 < c \leq |B(w)| \leq C$ en casi todo punto $w \in [0, 2\pi]$, nos proporciona la sucesión $\{b_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ buscada. Por tanto existe una sucesión $\{\tilde{\varphi}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ biortonormal a $\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Más aún, probemos que $\{\tilde{\varphi}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ es también una sucesión de Riesz en $L^2(\mathbb{R})$ y que $\overline{\text{span}}\{\tilde{\varphi}(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}} = \overline{\text{span}}\{\varphi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$.

Respecto de lo primero, nótese que

$$\sum_k |\hat{\tilde{\varphi}}(w+2k\pi)|^2 = |B(w)|^2 \sum_k |\hat{\varphi}(w+2k\pi)|^2,$$

y por tanto se cumple la hipótesis del lema 3.2.

Respecto de la segundo, veamos que la ecuación

$$\sum_n a_n \varphi(t-n) = \sum_n c_n \tilde{\varphi}(t-n) \quad (3.10)$$

está bien definida para coeficientes $\{a_n\}$ y $\{c_n\}$ en $\ell^2(\mathbb{Z})$, es decir, dada una sucesión $\{a_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$, existe otra sucesión $\{c_n\} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ cumpliendo lo anterior y recíprocamente. Tomando la transformada de Fourier en (3.10), se obtiene la condición equivalente de que la ecuación $A(w) = C(w)B(w)$ tenga solución en $L^2[0, 2\pi]$, siendo $A(w) = \sum_n a_n e^{-inw}$ y $C(w) = \sum_n c_n e^{-inw}$; esta última condición se cumple ya que $0 < c \leq |B(w)| \leq C$ en casi todo punto $w \in [0, 2\pi]$. \square

Un teorema de muestreo regular en V_φ^2

Como las muestras $\{f(a+m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ de $f \in V_\varphi^2$, con $a \in [0, 1)$ fijo, se escriben como:

$$f(a+m) = \langle F, K_{a+m} \rangle = \langle F, e^{-2\pi i m x} K_a \rangle, \quad m \in \mathbb{Z} \text{ donde } F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f,$$

la recuperación estable de $f \in V_\varphi^2$ a partir de la sucesión $\{f(a+m)\}_{m \in \mathbb{Z}}$, se reduce al estudio de la sucesión $\{e^{-2\pi i m x} K_a(x)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ en $L^2[0, 1]$.

Proposición 3.9. La sucesión $\{e^{-2\pi i m x} K_a(x)\}_{m \in \mathbb{Z}}$ es una base de Riesz en $L^2[0, 1]$ si y sólo si se verifica la condición: $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$, donde

$$\|K_a\|_0 := \operatorname{ess\,inf}_{x \in [0,1]} |K_a(x)| \quad \text{y} \quad \|K_a\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in [0,1]} |K_a(x)|.$$

Además, su base biortonormal viene dada por $\{e^{-2\pi i m x} / \overline{K_a(x)}\}_{m \in \mathbb{Z}}$.

La proposición anterior es una consecuencia inmediata del siguiente resultado:

Lema 3.3. El operador de multiplicación M_F en $L^2[0, 1]$ dado por

$$M_F : \begin{array}{ccc} L^2[0, 1] & \longrightarrow & L^2[0, 1] \\ f & \longmapsto & Ff, \end{array}$$

está bien definido si y sólo si $F \in L^\infty[0, 1]$. En este caso, el operador M_F es acotado con norma $\|M_F\| = \|F\|_\infty$.

Demostración. Si la función $F \in L^\infty[0, 1]$, es inmediato que $Ff \in L^2[0, 1]$ para toda $f \in L^2[0, 1]$. Supongamos que $Ff \in L^2[0, 1]$ para toda $f \in L^2[0, 1]$ y que sin embargo $F \notin L^\infty[0, 1]$. En este caso, para todo $k > 0$, el conjunto

$$A_k := \{t \in [0, 1] : |F(t)| \geq k\}$$

tiene medida positiva. Tomando $k = n \in \mathbb{N}$, los conjuntos definidos como $E_n := A_n \setminus A_{n+1}$ tienen medida de Lebesgue positiva $m(E_n) > 0$, son disjuntos dos a dos y además, se cumple que $|F(t)| \geq n$ en E_n .

Definimos la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ en $L^2[0, 1]$ donde f_n está dada por

$$f_n(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m(E_n)}} & \text{si } t \in E_n, \\ 0 & \text{si } t \notin E_n. \end{cases}$$

El sucesión así definida forma un sistema ortonormal en $L^2[0, 1]$ y por tanto, la función $g := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_n$ pertenece a $L^2[0, 1]$. Teniendo en cuenta que $f_n f_k = 0$ si $n \neq k$, para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\int_0^1 |F(t)g(t)|^2 dt \geq \int_0^1 |F(t)|^2 \left| \sum_{n=1}^N \frac{f_n(t)}{n} \right|^2 dt = \sum_{n=1}^N \int_{E_n} \frac{|F(t)|^2}{n^2 m(E_n)} dt \geq \sum_{n=1}^N 1 = N,$$

de donde $Fg \notin L^2[0, 1]$, llegando a una contradicción. Por lo tanto, la función $F \in L^\infty[0, 1]$.

Trivialmente se cumple que $\|M_F\| \leq \|F\|_\infty$. Probemos que se da la igualdad. Si fuera $\|F\|_\infty > \|M_F\|$, el conjunto

$$\{t \in [0, 1] : |F(t)| > \|M_F\|\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{t \in [0, 1] : |F(t)| \geq \|M_F\| + \frac{1}{n}\right\}$$

tendría medida positiva. En particular, existe $\epsilon > 0$ y un conjunto $E \subset [0, 1]$ con medida positiva tal que $|F(t)| \geq \|M_F\| + \epsilon$ en E . Definimos la función

$$g(t) := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{m(E)}} & \text{si } t \in E, \\ 0 & \text{si } t \notin E, \end{cases}$$

cuya norma es 1. Se tiene que

$$\|M_F\|^2 \geq \|M_F g\|^2 = \int_E \frac{|F(t)|^2}{m(E)} dt \geq (\|M_F\| + \epsilon)^2$$

lo que es falso. Por tanto, se cumple que $\|M_F\| = \|F\|_\infty$. \square

La base de Riesz de la proposición 3.9 será una base ortonormal si y sólo si $\|K_a\|_0 = \|K_a\|_\infty = 1$, es decir, se cumple que $|K_a(x)| = 1$ en casi todo punto de $[0, 1]$ (véase el ejemplo 1.12).

Ahora estamos en condiciones de probar un teorema de muestreo regular en el espacio V_φ^2 .

Teorema 3.6. *Sea $a \in [0, 1)$ cumpliendo la condición $0 < \|K_a\|_0 \leq \|K_a\|_\infty < \infty$ de la proposición 3.9. Entonces, toda función $f \in V_\varphi^2$ se puede recuperar a partir de la sucesión de sus muestras $\{f(a+n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ mediante la fórmula de muestreo*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n), \quad t \in \mathbb{R},$$

donde $S_a = \mathcal{T}_\varphi(1/\overline{K_a})$. La convergencia de la serie es absoluta y uniforme en \mathbb{R} .

Demostración. Dada $f \in V_\varphi^2$, desarrollamos la función $F = \mathcal{T}_\varphi^{-1} f \in L^2[0, 1]$ con respecto a la base de Riesz $\{e^{-2\pi i n x} / \overline{K_a(x)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ de $L^2[0, 1]$, dual de la base de Riesz $\{K_{a+n}(x) = e^{-2\pi i n x} K_a(x)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Obtenemos

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F, K_{a+n} \rangle \frac{e^{-2\pi i n x}}{K_a(x)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) \frac{e^{-2\pi i n x}}{K_a(x)} \quad \text{en } L^2[0, 1].$$

Aplicando el operador \mathcal{T}_φ en el desarrollo anterior

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) \mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi i n x} / \overline{K_a(x)})(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(a+n) S_a(t-n) \text{ en } L^2(\mathbb{R}),$$

donde $S_a := \mathcal{T}_\varphi(1/\overline{K_a})$. Nótese que para $n \in \mathbb{Z}$ y $F \in L^2[0, 1]$ se cumple la propiedad

$$\mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi i n x} F)(t) = (\mathcal{T}_\varphi F)(t - n), \quad t \in \mathbb{R}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_\varphi(e^{-2\pi i n x} F(x))(t) &= \langle e^{-2\pi i n x} F(x), \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi(t-m)} e^{-2\pi i m x} \rangle \\ &= \langle F, \sum_{m \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi(t-m)} e^{-2\pi i(m-n)x} \rangle = \langle F, \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\varphi(t-n-k)} e^{-2\pi i k x} \rangle \\ &= (\mathcal{T}_\varphi F)(t - n), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde se ha hecho el cambio de índice de sumación $k = m - n$.

Como V_φ^2 es un RKHS, la convergencia en la norma L^2 implica, convergencia puntual, que será uniforme en subconjuntos de \mathbb{R} en donde la función $t \mapsto \|K_t\|$ esté acotada (véase la ecuación (3.9)). La convergencia también es absoluta debido al carácter incondicional de una base de Riesz. \square

Implementación de una fórmula de muestreo

El problema del muestreo consiste en reconstruir una función $f \in V_\varphi^2$ a partir de la sucesión de muestras $\{f(a+n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$. Para ello necesitaremos determinar los coeficientes $\{a_k\}$ de la expresión

$$f(t) = \sum_k a_k \varphi(t-k), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (3.11)$$

Teniendo en cuenta el teorema 3.6, la reconstrucción involucra la función $S_a(t) = \sum_m b_m \varphi(t-m) \in V_\varphi^2$. Nótese que la sucesión $\{b_m\}$ son los coeficientes de Fourier de la función $1/\overline{K_a} \in L^2(0, 1)$. Introduciendo la expresión de S_a en la fórmula de muestreo se obtiene

$$f(t) = \sum_n f(a+n) S_a(t-n) = \sum_n f(a+n) \left(\sum_m b_m \varphi(t-n-m) \right).$$

El cambio de índice de sumación $k = n + m$ y el intercambio del orden de sumación permite escribir

$$f(t) = \sum_k \left(\sum_n f(a+n) b_{k-n} \right) \varphi(t-k),$$

es decir, los coeficientes $\{a_k\}$ se obtienen mediante la convolución discreta (filtrado) de las muestras

$$a_k = \sum_n f(a+n) b_{k-n}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Finalmente, mediante las funciones $\{\varphi(t-k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ se reconstruye la función f siguiendo la fórmula (3.11). De manera esquemática se tiene que:

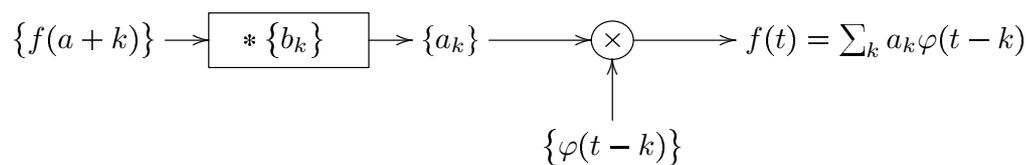


Figura 3.6: Implementación de una fórmula de muestreo