CEDYA 2013

Cálculo de coeficientes wavelets a partir de medias locales

Gerardo Pérez Villalón y Alberto Portal Ruiz
Universidad Politécnica de Madrid

Objetivo:

Calcular la sucesión de coeficientes

$$c_{J,k} := \langle f, \widetilde{\varphi}_{J,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widetilde{\varphi}_{J,k}(t)dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Objetivo:

Calcular la sucesión de coeficientes

$$c_{J,k} := \langle f, \widetilde{\varphi}_{J,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widetilde{\varphi}_{J,k}(t)dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\widetilde{\varphi}_{J,k} := 2^{J/2}\widetilde{\varphi}(2^J t - k)$$

Objetivo:

Calcular la sucesión de coeficientes

$$c_{J,k} := \langle f, \widetilde{\varphi}_{J,k} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\widetilde{\varphi}_{J,k}(t)dt, \quad k \in \mathbb{Z}$$

donde

$$\widetilde{\varphi}_{J,k} := 2^{J/2}\widetilde{\varphi}(2^J t - k)$$

y

$$\widetilde{\varphi}(t) = \sum_n \widetilde{h}_n \widetilde{\varphi}(2t - n)$$

Cálculo de los coeficientes $c_{J,k}$ a partir de muestras puntuales

Generalmente los coeficientes $c_{J,k}$ se calculan a partir de

$$S_n = f\big(T[n+\tau]\big), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad T := 2^{-J}$$

Cálculo de los coeficientes $c_{J,k}$ a partir de muestras puntuales

Generalmente los coeficientes $c_{J,k}$ se calculan a partir de

$$S_n = f\big(T[n+\tau]\big), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad T := 2^{-J}$$

con reglas del tipo

$$c_{J,k} \;\approx\; c_{J,k}^{\text{approx}} = \sqrt{T}\sum_n \alpha_n S_{k+Bn}$$

Cálculo de los coeficientes $c_{J,k}$ a partir de muestras puntuales

Generalmente los coeficientes $c_{J,k}$ se calculan a partir de

$$S_n = f\big(T[n+\tau]\big), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad T := 2^{-J}$$

con reglas del tipo

$$c_{J,k} \;\approx\; c_{J,k}^{\text{approx}} = \sqrt{T}\sum_n \alpha_n S_{k+Bn}$$

que se corresponden con las fórmulas de cuadratura

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\varphi}(t)dt \;\approx\; \sum_n \alpha_n\, g(Bn+\tau)$$

Cálculo de los coeficientes $c_{J,k}$ a partir de muestras puntuales

Generalmente los coeficientes $c_{J,k}$ se calculan a partir de

$$S_n = f\big(T[n+\tau]\big), \qquad n \in \mathbb{Z}, \quad T := 2^{-J}$$

con reglas del tipo

$$c_{J,k} \;\approx\; c_{J,k}^{\text{approx}} = \sqrt{T}\sum_n \alpha_n S_{k+Bn}$$

que se corresponden con las fórmulas de cuadratura

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\varphi}(t)dt \;\approx\; \sum_n \alpha_n\, g(Bn+\tau)$$

$L \equiv$ orden de la fórmula de cuadratura $\geq N \equiv$ orden del sistema

Cálculo de los coeficientes a partir de medias ponderadas

$$S_n = \sqrt{T} \int_{-\infty}^{\infty} f\big(T[t+n+\tau]\big) u(t) dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Cálculo de los coeficientes a partir de medias ponderadas

$$S_n = \sqrt{T}\int_{-\infty}^{\infty} f\big(T[t+n+\tau]\big)u(t)dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si $u(t) = \delta(t)$ entonces $S_n = \sqrt{T} f\big(T[n+\tau]\big)$

Cálculo de los coeficientes a partir de medias ponderadas

$$S_n = \sqrt{T}\int_{-\infty}^{\infty} f\big(T[t+n+\tau]\big)u(t)dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si $u(t) = \delta(t)$ entonces $S_n = \sqrt{T} f\big(T[n+\tau]\big)$

Si $u(t) = X_{[0,1]}(t)$ entonces $S_n = \dfrac{1}{\sqrt{T}} \displaystyle\int_{T(n+\tau)}^{T(n+1+\tau)} f(t)dt$

Cálculo de los coeficientes a partir de medias ponderadas

$$S_n = \sqrt{T}\int_{-\infty}^{\infty} f\big(T[t+n+\tau]\big)u(t)dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si $u(t) = \delta(t)$ entonces $S_n = \sqrt{T} f\big(T[n+\tau]\big)$

Si $u(t) = X_{[0,1]}(t)$ entonces $S_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{T(n+\tau)}^{T(n+1+\tau)} f(t)dt$

Para calcular los coeficientes desde estas muestras, es natural considerar reglas del tipo

$$c_{J,k} \approx c_{J,k}^{\text{approx}} = \sum_n \alpha_n S_{k+Bn}$$

Cálculo de los coeficientes a partir de medias ponderadas

$$S_n = \sqrt{T}\int_{-\infty}^{\infty} f\big(T[t+n+\tau]\big)u(t)dt, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Si $u(t) = \delta(t)$ entonces $S_n = \sqrt{T} f\big(T[n+\tau]\big)$

Si $u(t) = X_{[0,1]}(t)$ entonces $S_n = \frac{1}{\sqrt{T}}\int_{T(n+\tau)}^{T(n+1+\tau)} f(t)dt$

Para calcular los coeficientes desde estas muestras, es natural considerar reglas del tipo

$$c_{J,k} \approx c_{J,k}^{\text{approx}} = \sum_n \alpha_n S_{k+Bn}$$

que se corresponden con las aproximaciones

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\widetilde{\varphi}(t)dt \approx \sum_n \alpha_n \int_{-\infty}^{\infty} g(t)u(t-Bn-\tau)dt$$

Una estimación para el error

Consideramos la norma ℓ^2 del error

$$\mathcal{E}(f) := \left\| \{c_{J,k} - c_{J,k}^{\text{approx}}\}_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left[\sum_k (c_{J,k} - c_{J,k}^{\text{approx}})^2 \right]^{1/2}$$

Una estimación para el error

Consideramos la norma ℓ^2 del error

$$\mathcal{E}(f) := \left\| \{c_{J,k} - c_{J,k}^{\text{approx}}\}_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \left[\sum_k (c_{J,k} - c_{J,k}^{\text{approx}})^2 \right]^{1/2}$$

Para funciones suaves $f(t)$, este error admite una simple estimación:

$$\mathcal{E}^2(f) \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 E(Tw)dw \qquad (1)$$

donde

$$E(w) := \left| \widehat{\widetilde{\varphi}}(w) - \widehat{u}(w) \sum_n \alpha_n e^{-iw(Bn+\tau)} \right|^2$$

Justificación de la estimación

1. Si $f \in W_2^r$, se tiene

$$\left|\mathcal{E}(f) - \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 E(Tw)dw\right]^{1/2}\right| \leq C \, \|f^{(r)}\| \, T^r$$

donde $C := \|E\|_\infty^{1/2}\pi^{-r}\big[1 + \big(\sum_{k\neq 0}(2|k|-1)^{-2r}\big)^{1/2}\big]$.

Justificación de la estimación

1. Si $f \in W_2^r$, se tiene

$$\left|\mathcal{E}(f) - \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 E(Tw)dw\right]^{1/2}\right| \leq C \, \|f^{(r)}\| \, T^r$$

donde $C := \|E\|_{\infty}^{1/2}\pi^{-r}\left[1 + \left(\sum_{k\neq 0}(2|k|-1)^{-2r}\right)^{1/2}\right]$.

2. Si f es banda limitada a un intervalo de longitud menor que $2\pi/T$, la estimación es exacta.

Justificación de la estimación

1. Si $f \in W_2^r$, se tiene

$$\left| \mathcal{E}(f) - \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 E(Tw) dw \right]^{1/2} \right| \leq C \, \|f^{(r)}\| \, T^r$$

   donde $C := \|E\|_{\infty}^{1/2} \pi^{-r} \left[1 + \left(\sum_{k \neq 0} (2|k| - 1)^{-2r} \right)^{1/2} \right]$.
2. Si f es banda limitada a un intervalo de longitud menor que $2\pi/T$, la estimación es exacta.
3. Sea $f_\rho(t) := f(t-\rho)$. El error de aproximación $\mathcal{E}(f_\rho)$ varia con ρ, pero es T-periódico. Se tiene

$$\mathbb{E}^2(f) := \frac{1}{T} \int_0^T \mathcal{E}^2(f_\rho) \, d\rho = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|^2 E(Tw) dw$$

Orden de aproximación

$$\mathcal{E}(f) = \left\| \{ c_{J,k} - c_{J,k}^{\text{approx}} \}_{k \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \mathcal{O}(T^L), \quad T \mapsto 0, \quad f \in W_2^{L+1}$$

Orden de aproximación

$$\mathcal{E}(f) = \left\| \{c_{J,k} - c_{J,k}^{\text{approx}}\}_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \mathcal{O}(T^L), \quad T \mapsto 0, \quad f \in W_2^{L+1}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} t^l \widetilde{\varphi}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^l \sum_n \alpha_n u(t - Bn - \tau)dt, \quad l = 0, .., L-1$$

Orden de aproximación

$$\mathcal{E}(f) = \left\| \{c_{J,k} - c_{J,k}^{\text{approx}}\}_{k\in\mathbb{Z}} \right\|_{\ell^2(\mathbb{Z})} = \mathcal{O}(T^L), \quad T \mapsto 0, \quad f \in W_2^{L+1}$$

$$\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} t^l \widetilde{\varphi}(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} t^l \sum_n \alpha_n u(t - Bn - \tau)dt, \quad l = 0, .., L-1$$

En este caso para $f \in W_2^{L+1}$, se tiene

$$\mathcal{E}(f) = \frac{|G^{(L)}(0)|}{L!} \|f^{(L)}\| \, T^L + \mathcal{O}(T^{L+1}), \quad \text{cuando} \quad T \to 0.$$

donde

$$G(w) := \widehat{\widetilde{\varphi}}(w) - \widehat{u}(w) \sum_n \alpha_n e^{-iw(Bn+\tau)}$$

Determinación de los parámetros

- Para un parámetro de traslación τ fijo, se puede obtener una formula de L puntos con orden L

Determinación de los parámetros

- Para un parámetro de traslación τ fijo, se puede obtener una formula de L puntos con orden L
- Cuando las φ, $\widetilde{\varphi}$ y u son simétricas, tomando $\tau = 0$, se pueden encontrar fácilmente $2M - 1$ pesos simétricos, $\alpha_{-(M-1)}, \ldots, \alpha_0, \ldots \alpha_{M-1}$ dando orden $2M$

Determinación de los parámetros

- Para un parámetro de traslación τ fijo, se puede obtener una formula de L puntos con orden L
- Cuando las φ, $\widetilde{\varphi}$ y u son simétricas, tomando $\tau = 0$, se pueden encontrar fácilmente $2M - 1$ pesos simétricos, $\alpha_{-(M-1)}, \ldots, \alpha_0, \ldots \alpha_{M-1}$ dando orden $2M$
- Se puede determinar una ecuación polinómica de grado $L - 1$ con una única variable τ, tal que sus raíces dan los valores para τ, para los que existen reglas $L - 1$ dando orden L

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala

$$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$$

Muestras puntuales: $\tau = 0, B = 1, \alpha_0 = 7/6, \alpha_{-1} = \alpha_1 = -1/12$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Muestras puntuales: $\tau = 0, B = 1, \alpha_0 = 7/6, \alpha_{-1} = \alpha_1 = -1/12$

$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{720}\|f^{(4)}\| T^4 + \mathcal{O}(T^5) \approx 0,0014\|f^{(4)}\| T^4 + \mathcal{O}(T^5),$$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Muestras puntuales: $\tau = 0, B = 1, \alpha_0 = 7/6, \alpha_{-1} = \alpha_1 = -1/12$

$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{720}\|f^{(4)}\| T^4 + \mathcal{O}(T^5) \approx 0,0014\|f^{(4)}\| T^4 + \mathcal{O}(T^5),$$

$$\begin{array}{ll} T = 1.00e-00, & \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 2.01e-02 \\ T = 2.50e-01, & \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 9.79e-03 \\ T = 6.25e-02, & \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 2.44e-07 \end{array}$$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Muestras en celda: $\tau = 0, B = 1, \alpha_0 = 5/4, \quad \alpha_{-1} = \alpha_1 = -1/8$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Muestras en celda: $\tau = 0, B = 1, \alpha_0 = 5/4, \quad \alpha_{-1} = \alpha_1 = -1/8$

$$\mathbb{E}(f) = \frac{13}{1920}\|f^{(4)}\|T^4 + \mathcal{O}(T^5) \approx 0,0068\|f^{(4)}\|T^4 + \mathcal{O}(T^5),$$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Muestras en celda: $\tau = 0, B = 1, \alpha_0 = 5/4, \quad \alpha_{-1} = \alpha_1 = -1/8$

$$\mathbb{E}(f) = \frac{13}{1920}\|f^{(4)}\|T^4 + \mathcal{O}(T^5) \approx 0,0068\|f^{(4)}\|T^4 + \mathcal{O}(T^5),$$

$$\begin{aligned}
T &= 1.00e-00, \quad \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 3.28e-02 \\
T &= 2.50e-01, \quad \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 2.86e-04 \\
T &= 6.25e-02, \quad \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 1.18e-06
\end{aligned}$$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Cambio de coeficientes wavelets $u =_3 \phi$**:** $\tau = -1.884726$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Cambio de coeficientes wavelets $u =_3 \phi$**:** $\tau = -1.884726$

$$\mathbb{E}(f) \approx 0.0048 \| f^{(4)} \| T^4 + \mathcal{O}(T^5),$$

Ejemplo

Sean $\varphi(t) = (1 - |t|)\chi_{[-1,1]}(t)$ y la función de escala biortogonal simétrica $\widetilde{\varphi}$ definida por sus coeficientes de escala
$\widetilde{h}_0 = \frac{3}{2}, \quad \widetilde{h}_1 = \widetilde{h}_{-1} = \frac{1}{2}, \quad \widetilde{h}_2 = \widetilde{h}_{-2} = -\frac{1}{4}$

Cambio de coeficientes wavelets $u =_3 \phi$**:** $\tau = -1.884726$

$$\mathbb{E}(f) \approx 0.0048 \| f^{(4)} \| T^4 + \mathcal{O}(T^5),$$

$$\begin{aligned} T &= 1.00e-00, \quad \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 5.58e-02 \\ T &= 2.50e-01, \quad \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 1.40e-04 \\ T &= 6.25e-02, \quad \mathbb{E}(e^{-t^2}) = 1.45e-07 \end{aligned}$$

Bibliografía

G. Pérez-Villalón and A. Portal
Computation of wavelet coefficients from average samples.
J. Comput. Appl. Math., 248:118-130, 2013.