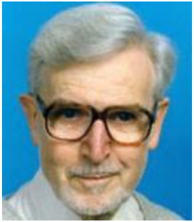
Series interpoladoras de tipo Lagrange, núcleos analíticos de Kramer y la propiedad ZR

Miguel A. Hernández Medina[1]
(en colaboración con Antonio G. García)

[1]Departamento de Matemática Aplicada a las TTII
ETSIT, Universidad Politécnica de Madrid



Norrie Everitt

1924-2011

Teorema WSK

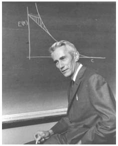
Cualquier función f del espacio de Paley-Wiener:

$$PW_\pi := \{f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}), \operatorname{supp} \widehat{f} \subseteq [-\pi, \pi]\}$$

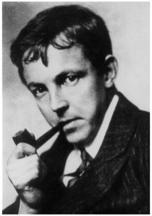
(bandalimitada a $[-\pi, \pi]$) puede desarrollarse como

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) \frac{\operatorname{sen} \pi(t-n)}{\pi(t-n)}, \; t \in \mathbb{R}$$

La serie converge absoluta y uniformemente en $\mathbb{R}$.



Teorema WSK



G. H. Hardy

- $f \in PW_\pi$, $f(t) = \langle \widehat{f}, \frac{e^{-itw}}{\sqrt{2\pi}} \rangle_{L^2[-\pi,\pi]}$
- La serie muestral es un desarrollo ortogonal en PW_π.
- A PW_π see puede dotar de una estructura de espacio de Hilbert utilizando la dualidad de Fourier

Teorema de Kramer

- $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert separable y Ω subconjunto de $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$
- $K : \Omega \longrightarrow \mathcal{H}$ continua. Para $x \in \mathcal{H}$ se define: $f(t) := \langle K(t), x \rangle_{\mathcal{H}}$, $t \in \Omega$

Teorema

Supongamos existe $\{t_n\}$ en Ω tal que $\{K(t_n)\}$ es base ortogonal de $\mathcal{H}$. Entonces,

$$f(t) = \sum_n f(t_n) S_n(t)\,, \quad t \in \Omega$$

donde

$$S_n(t) = \frac{\langle K(t), K(t_n) \rangle_{\mathcal{H}}}{\|K(t_n)\|^2}$$

La serie converge absolutamente en cada punto de Ω y uniformemente en subconjuntos de Ω donde $\|K(t)\|$ esté acotada

Teorema de Kramer

¿Cómo obtener K y la sucesión $\{t_n\}$?

Teorema de Kramer

¿Cómo obtener K y la sucesión $\{t_n\}$?

Problemas diferenciales y en diferencias

- $\{t_n\}$ sucesión de los **autovalores** del problema y
- $\{K(t_n)\}$ sucesión de las correspondientes **autofunciones**.

Teorema de Kramer

¿Cómo obtener K y la sucesión $\{t_n\}$?

Problemas diferenciales y en diferencias

- $\{t_n\}$ sucesión de los **autovalores** del problema y
- $\{K(t_n)\}$ sucesión de las correspondientes **autofunciones**.

Ejemplo: Volviendo al Teorema de Shannon

$$\begin{cases} y' = ty\,; & x \in [-\pi, \pi] \\ y(-\pi) = y(\pi) \end{cases}$$

$$[K(t)](x) = e^{itx}\,; \quad t_n = n \in \mathbb{Z}$$

Teorema de Kramer

¿Cómo obtener K y la sucesión $\{t_n\}$?

Problemas diferenciales y en diferencias

- $\{t_n\}$ sucesión de los **autovalores** del problema y
- $\{K(t_n)\}$ sucesión de las correspondientes **autofunciones**.

Otros casos

Referencias

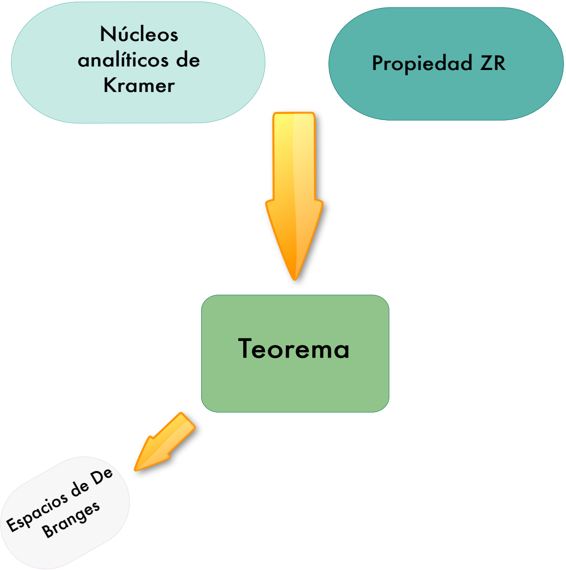
$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{P(t)}{(t - t_n) P'(t_n)} \quad t \in \Omega$$

Problema

¿Cuándo se puede escribir la serie muestral como una serie interpoladora tipo Lagrange?

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) S_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f(t_n) \frac{P(t)}{(t - t_n) P'(t_n)}$$

(P tiene ceros simples en $\{z_n\}$)


Núcleos analíticos de Kramer
Propiedad ZR
Teorema
Espacios de De Branges

Versión analítica del Teorema de Kramer

- $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert complejo y separable,
- $K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}$, función **entera** con valores en $\mathcal{H}$,
- $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que $K(z_n) = e_n$, donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal de $\mathcal{H}$.

K es un núcleo analítico

Versión analítica del Teorema de Kramer

- $\mathcal{H}$ espacio de Hilbert complejo y separable,
- $K : \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{H}$, función **entera** con valores en $\mathcal{H}$,
- $\exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ tal que $K(z_n) = e_n$, donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una base ortogonal de $\mathcal{H}$.

K es un núcleo analítico de Kramer

Espacio $\mathcal{H}_K$

$$\mathcal{H}_K = \{f(z) := \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H},\ z \in \mathbb{C}\}$$

$\mathcal{H}_K$ es un RKHS de funciones enteras

- $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \text{ínf}\{\|x\| \ : \ \mathcal{T}x = f\}$ donde

$$\mathcal{T} : x \in \mathbb{H} \longrightarrow f \in \mathcal{H}_K$$

- El núcleo reproductor viene dado por

$$k(z,w) = \langle K(z), K(w)\rangle_{\mathcal{H}} \quad (k(w,z) = \langle K(w), K(z)\rangle_{\mathcal{H}})$$

- $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es una función entera $\Leftrightarrow z \mapsto \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}}$ es una función entera $\forall x \in \mathcal{H}$

Espacio $\mathcal{H}_K$

$$\mathcal{H}_K = \{f(z) := \langle K(z), x \rangle_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H},\, z \in \mathbb{C}\}$$

$\mathcal{H}_K$ es un RKHS de funciones enteras

- $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \text{ínf}\{\|x\| \ : \ \mathcal{T}x = f\}$ donde

$$\mathcal{T} : x \in \mathbb{H} \longrightarrow f \in \mathcal{H}_K$$

$\{K(z)|z \in \mathbb{C}\}$ es completo en $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T}$ isometría antilineal

- El núcleo reproductor viene dado por

$$k(z, w) = \langle K(z), K(w) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (k(w, z) = \langle K(w), K(z) \rangle_{\mathcal{H}})$$

- $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es una función entera $\Leftrightarrow z \mapsto \langle K(z), x \rangle_{\mathcal{H}}$ es una función entera $\forall x \in \mathcal{H}$

Espacio $\mathcal{H}_K$

$$\mathcal{H}_K = \{f(z) := \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H},\ z \in \mathbb{C}\}$$

$\mathcal{H}_K$ es un RKHS de funciones enteras

- $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \text{ínf}\{\|x\| \ : \ \mathcal{T}x = f\}$ donde

$$\mathcal{T} : x \in \mathbb{H} \longrightarrow f \in \mathcal{H}_K$$

$\{K(z)|z \in \mathbb{C}\}$ es completo en $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T}$ isometría antilineal

- El núcleo reproductor viene dado por

$$k(z,w) = \langle K(z), K(w)\rangle_{\mathcal{H}} \quad (k(w,z) = \langle K(w), K(z)\rangle_{\mathcal{H}})$$

- $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es una función entera $\Leftrightarrow z \mapsto \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}}$ es una función entera $\forall x \in \mathcal{H}$

Espacio $\mathcal{H}_K$

$$\mathcal{H}_K = \{f(z) := \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}} : x \in \mathcal{H},\ z \in \mathbb{C}\}$$

$\mathcal{H}_K$ es un RKHS de funciones enteras

- $\|f\|_{\mathcal{H}_K} = \text{ínf}\{\|x\| \ : \ \mathcal{T}x = f\}$ donde

$$\mathcal{T} : x \in \mathbb{H} \longrightarrow f \in \mathcal{H}_K$$

$\{K(z)|z \in \mathbb{C}\}$ es completo en $\mathcal{H} \Rightarrow \mathcal{T}$ isometría antilineal

- El núcleo reproductor viene dado por

$$k(z, w) = \langle K(z), K(w)\rangle_{\mathcal{H}} \quad (k(w, z) = \langle K(w), K(z)\rangle_{\mathcal{H}})$$

- $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ es una función entera $\Leftrightarrow$ $z \mapsto \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}}$ es una función entera $\forall x \in \mathcal{H}$

Versión analítica del Teorema de Kramer

Sea $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ un núcleo analítico de Kramer asociado a $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$. Entonces, si $f \in \mathcal{H}_K$

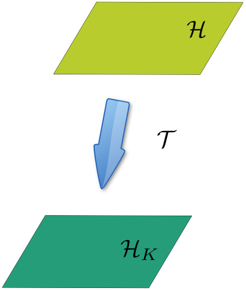
$$f(z) = \sum_n f(z_n) S_n(z)\,, \quad z \in \mathbb{C}$$

donde

$$S_n(z) = \frac{\langle K(z), K(z_n)\rangle_{\mathcal{H}}}{\|K(z_n)\|^2}$$

La serie converge absolutamente en cada punto de $\mathbb{C}$ y uniformemente en subconjuntos de $\mathbb{C}$ donde $\|K(z)\|$ esté acotada

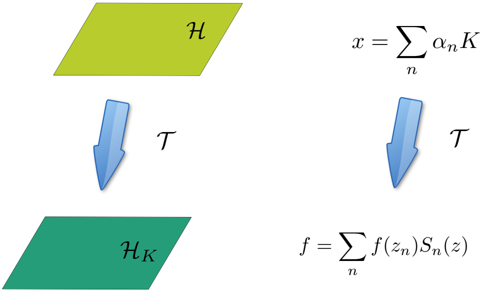
Teorema de Kramer (demostración)



$$x = \sum_n \alpha_n K(z_n)$$

$$f = \sum_n f(z_n) S_n(z)$$

Teorema de Kramer (demostración)



$$x = \sum_n \alpha_n K(z_n)$$

$$f = \sum_n f(z_n) S_n(z)$$

1. $\mathcal{H}_K$ RKHS $\Rightarrow$ convergencia en norma implica convergencia puntual.
2. La convergencia absoluta resulta de la convergencia incondicional de los desarrollos ortogonales en $\mathcal{H}$.

Propiedad ZR

Definición

Un conjunto $\mathcal{A}$ de funciones enteras verifica la propiedad de **Zero Removing** (ZR) si

$$g \in \mathcal{A} \text{ con } g(w) = 0 \Rightarrow \frac{g(z)}{z - w} \in \mathcal{A}$$

Propiedad ZR

Definición

Un conjunto $\mathcal{A}$ de funciones enteras verifica la propiedad de **Zero Removing** (ZR) si

$$g \in \mathcal{A} \text{ con } g(w) = 0 \Rightarrow \frac{g(z)}{z - w} \in \mathcal{A}$$

En $H^2_\omega(\mathbb{D})$, **nearly invariant** por el operador *backward shift*

$$g \mapsto \frac{g(z) - g(0)}{z}$$

$$\cdots \mapsto z^{n+1} \mapsto z^n \mapsto \cdots \mapsto 1 \mapsto 0$$

La propiedad ZR y series muestrales interpoladoras de tipo Lagrange

Sea $\mathcal{H}_K = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} | f(z) = \langle K(z), x \rangle_{\mathcal{H}}\}$, K núcleo analítico de Kramer respecto de $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ y la base ortogonal de $\mathcal{H}$ $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

La fórmula muestral en $\mathcal{H}_K$

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) S_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z_n) \frac{P(z)}{(z - z_n) P'(z_n)}$$

se puede escribir como una serie interpoladora de tipo Lagrange

$$\Updownarrow$$

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR

Demostración

W. N. Everitt, A.G. García and M.A. Hernández-Medina.
On Lagrange-type interpolation series and analytic Kramer kernels,
Results Math., 51:215-228, 2008.

P. Fernández-Moncada, A.G. García and M.A. Hernández-Medina
The zero-removing property and Lagrange-type interpolation series.
Numer. Funct. Anal. Optim., 32:858-876, 2011.

Demostración (esquema)

Suficiencia

1. Propiedad ZR

   $\Longrightarrow$ La función muestral S_n tiene sus zeros (simples) en $\{z_r\}_{r\neq n}$

2. Sea Q, una función entera con zeros simples en $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe una función entera A_n sin zeros tal que

$$(z - z_n)S_n(z) = A_n(z)Q(z)$$

3. Propiedad ZR+ fórmula muestral

   $\Longrightarrow$ $A_n(z) = \sigma_n A(z)$, $n \in \mathbb{N}$,

   Entonces

$$S_n(z) = \frac{A(z)Q(z)}{z - z_n} \boxed{\frac{1}{A(z_n)Q'(z_n)}} \frac{A(z)Q(z)}{z - z_n}$$

Demostración (esquema)

Suficiencia

1. Propiedad ZR
   $\Longrightarrow$ La función muestral S_n tiene sus zeros (simples) en $\{z_r\}_{r\neq n}$
2. Sea Q, una función entera con zeros simples en $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe una función entera A_n sin zeros tal que

$$(z-z_n)S_n(z)=A_n(z)Q(z)$$

3. Propiedad ZR+ fórmula muestral
   $\Longrightarrow$ $A_n(z)=\sigma_n A(z)$, $n\in\mathbb{N}$,
   Entonces

$$S_n(z)=\frac{A(z)Q(z)}{z-z_n}=\boxed{\frac{1}{A(z_n)Q'(z_n)}}\frac{A(z)Q(z)}{z-z_n}$$

Demostración (esquema)

Suficiencia

1. Propiedad ZR
   $\Longrightarrow$ La función muestral S_n tiene sus zeros (simples) en $\{z_r\}_{r\neq n}$
2. Sea Q, una función entera con zeros simples en $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe una función entera A_n sin zeros tal que

$$(z-z_n)S_n(z)=A_n(z)Q(z)$$

3. Propiedad ZR+ fórmula muestral
   $\Longrightarrow$ $A_n(z)=\sigma_n A(z)$, $n\in\mathbb{N}$,
   Entonces

$$S_n(z)=\sigma_n\,\frac{A(z)Q(z)}{z-z_n}=\boxed{\frac{1}{A(z_n)Q'(z_n)}}\,\frac{A(z)Q(z)}{z-z_n}$$

Demostración (esquema)

Suficiencia

1. Propiedad ZR
   $\Longrightarrow$ La función muestral S_n tiene sus zeros (simples) en $\{z_r\}_{r\neq n}$
2. Sea Q, una función entera con zeros simples en $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Para cada $n\in\mathbb{N}$, existe una función entera A_n sin zeros tal que
$$(z-z_n)S_n(z)=A_n(z)Q(z)$$
3. Propiedad ZR+ fórmula muestral
   $\Longrightarrow$ $A_n(z)=\sigma_n A(z),\ n\in\mathbb{N},$
   Entonces
$$S_n(z)=\boxed{\sigma_n}\,\frac{A(z)Q(z)}{z-z_n}=\boxed{\frac{1}{A(z_n)Q'(z_n)}}\,\frac{A(z)Q(z)}{z-z_n}$$

Demostración (esquema)

Necesidad

- Sea $g \in \mathcal{H}_K$ con $g(w) = 0$, ¿$z \mapsto \dfrac{g(z)}{z-w} \in \mathcal{H}_K$?

Demostración (esquema)

Necesidad

- Sea $g \in \mathcal{H}_K$ con $g(w) = 0$, ¿$z \mapsto \dfrac{g(z)}{z-w} \in \mathcal{H}_K$?

- $w \notin \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

- $w = z_n$

Serie Interpoladora de tipo Lagrange

- $z \mapsto \dfrac{g(z)}{z-w}$ verifica la fórmula muestral
- $\exists y \in \mathcal{H}$,
$$\frac{g(z)}{z-w} = \langle K(z), y \rangle$$

Propiedad interpoladora de las funciones muestrales

$$S_n(z_m) = \delta_{nm}$$

No acotación de la sucesión de muestras

$$\lim_{n\to\infty} |z_n| = +\infty$$

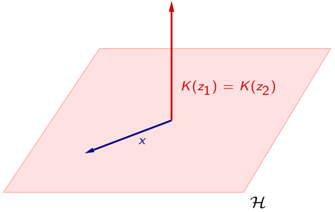
Propiedad ZR. Ejemplos

- Sea $K : \mathbb{C} \to \mathcal{H}$ un núcleo analítico tal que

$$K(z_1) = K(z_2),\ z_1 \neq z_2$$

$\mathcal{H}_K$ no verifica la propiedad ZR.

$$K : \mathbb{C} \to L^2[-\pi, \pi],\ [K(z)](x) = e^{iz^2 x}$$



- $f(z_1) = 0\ (\Rightarrow\ f(z_2) = 0)$
- $f(z) = \langle K(z), x \rangle,\ z \in \mathbb{C}$

Propiedad ZR. Ejemplos

Transformada coseno finita

- $\mathcal{H} = L^2[0,\pi]$, $K(z) : \mathbb{C} \to L^2[0,\pi]$

$$[K(z)](x) = \cos zx$$

$\mathcal{H}_K \equiv$ funciones pares de PW_π ($\Rightarrow \mathcal{H}_K$ no ZR)

Propiedad ZR. Ejemplos

Transformada coseno finita

- $\mathcal{H} = L^2[0,\pi]$, $K(z) : \mathbb{C} \to L^2[0,\pi]$

$$[K(z)](x) = \cos zx$$

$\mathcal{H}_K \equiv$ funciones pares de PW_π ($\Rightarrow \mathcal{H}_K$ no ZR)

Para cada $f \in \mathcal{H}_K$, $f(z) = \langle \cos zx, F(x) \rangle_{L^2[0,\pi]}$,

$$f(z) = f(0)\frac{\operatorname{sen} \pi z}{\pi z} + \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{(-1)^n z \operatorname{sen} \pi z}{\pi^2}$$

NO puede escribirse como un desarrollo de tipo Lagrange

Propiedad ZR. Ejemplos

$E^2(\gamma)$, [Chan and Shapiro, 1991]

- Sea $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-1} z^n$ con $\gamma_n > 0$ y $\gamma_n/\gamma_{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$
- Una función entera $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ pertenece a $E^2(\gamma)$ sii

$$\{\gamma_n \alpha_n\}_{\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$$

Propiedad ZR. Ejemplos

$E^2(\gamma)$, [Chan and Shapiro, 1991]

- Sea $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-1} z^n$ con $\gamma_n > 0$ y $\gamma_n/\gamma_{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$
- Una función entera $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ pertenece a $E^2(\gamma)$ sii

$$\{\gamma_n \alpha_n\}_{\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$$

$E^2(\gamma)$ **es un espacio $\mathcal{H}_K$:** Sea $\{e_n\}_{n=0}^{\infty}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$ y

$$\begin{aligned} K_\gamma : \quad \mathbb{C} &\longrightarrow \quad \mathcal{H} \\ z &\longmapsto \quad K_\gamma(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\gamma_n} z^n , \end{aligned}$$

Propiedad ZR. Ejemplos

$E^2(\gamma)$, [Chan and Shapiro, 1991]

- Sea $\gamma = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-1} z^n$ con $\gamma_n > 0$ y $\gamma_n/\gamma_{n+1} \to 0$ cuando $n \to \infty$
- Una función entera $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n$ pertenece a $E^2(\gamma)$ sii

$$\{\gamma_n \alpha_n\}_{\mathbb{N}_0} \in \ell^2(\mathbb{N}_0)$$

$E^2(\gamma)$ verifica la propiedad ZR

Propiedad ZR. Ejemplos

El espacio PW_π

Teorema de Paley-Wiener

$$PW_\pi = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \text{ entera } : |f(z)| \leq Ae^{\pi|z|} \text{ y } f_{|\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$K : \mathbb{C} \to L^2[-\pi, \pi]$, $[K(z)](x) = e^{izx}$, $\mathcal{H}_K = PW_\pi$

PW_π verifica la propiedad ZR

Propiedad ZR. Ejemplos

El espacio PW_π

Teorema de Paley-Wiener

$$PW_\pi = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \text{entera} \ : |f(z)| \leq Ae^{\pi|z|} \text{ y } f_{|\mathbb{R}} \in L^2(\mathbb{R})\}$$

$K : \mathbb{C} \to L^2[-\pi, \pi]$, $[K(z)](x) = e^{izx}$, $\mathcal{H}_K = PW_\pi$

PW_π verifica la propiedad ZR

Espacios de De Branges.

L. de Branges
Hilbert spaces of Entire Functions
Prentice Hall, 1968.

Espacios de De Branges (II)

- E función entera con $|E(x-iy)| < |E(x+iy)|$ para cada $y > 0$
- $\mathcal{H}(E)$ es el conjunto de funciones enteras F tales que
  1. $\|F\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 dt < \infty$
  2. F/E, F^*/E son de tipo acotado y tipo medio no positivo en $\mathbb{C}^+$

Espacios de De Branges (II)

- E función entera con $|E(x-iy)| < |E(x+iy)|$ para cada $y > 0$
- $\mathcal{H}(E)$ es el conjunto de funciones enteras F tales que
  1. $\|F\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 dt < \infty$
  2. F/E, F^*/E son de tipo acotado y tipo medio no positivo en $\mathbb{C}^+$

Teorema de factorización de Nevanlinna Si G, analitica en $\mathbb{C}^+$, es de tipo acotado entonces

$$G(z) = B(z)e^{-i\mathbf{h}z}e^{H(z)}$$

B es un producto de Blaschke, $h \in \mathbb{R}$ y H es analítica en $\mathbb{C}^+$ con

$$\Re H(x+iy) = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu(t)}{(t-x)^2+y^2}, \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|d\mu(t)|}{1+t^2} < \infty$$

Espacios de De Branges (II)

- E función entera con $|E(x-iy)| < |E(x+iy)|$ para cada $y > 0$
- $\mathcal{H}(E)$ es el conjunto de funciones enteras F tales que
  1. $\|F\|_E^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 dt < \infty$
  2. F/E, F^*/E son de tipo acotado y tipo medio no positivo en $\mathbb{C}^+$

Espacios de De Branges y propiedad ZR

- Si $E(t) \neq 0$ con $t \in \mathbb{R}$ entonces $\mathcal{H}(E)$ verifica la propiedad ZR
- Para cualquier función de estructura E existe una función de estructura estricta E' tal que $\mathcal{H}(E)$ y $\mathcal{H}(E')$ son isométricamente isomorfos.

Espacios de De Branges (II)

- E función entera con $|E(x-iy)|<|E(x+iy)|$ para cada $y>0$
- $\mathcal{H}(E)$ es el conjunto de funciones enteras F tales que
  1. $\|F\|_E^2=\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 dt<\infty$
  2. F/E, F^*/E son de tipo acotado y tipo medio no positivo en $\mathbb{C}^+$

Espacios de De Branges y propiedad ZR

- Si $E(t)\neq 0$ con $t\in\mathbb{R}$ entonces $\mathcal{H}(E)$ verifica la propiedad ZR

  E es estricta
- Para cualquier función de estructura E existe una función de estructura estricta E' tal que $\mathcal{H}(E)$ y $\mathcal{H}(E')$ son isométricamente isomorfos.

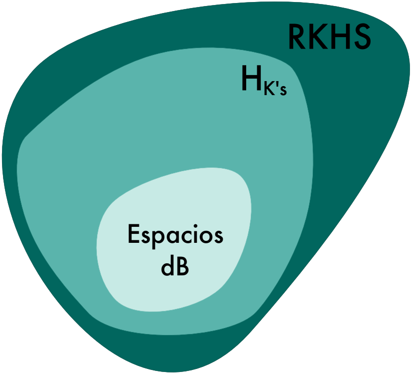
Espacios de De Branges (II)

- E función entera con $|E(x-iy)| < |E(x+iy)|$ para cada $y > 0$
- $\mathcal{H}(E)$ es el conjunto de funciones enteras F tales que
  1. $\|F\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{F(t)}{E(t)}\right|^2 dt < \infty$
  2. F/E, F^*/E son de tipo acotado y tipo medio no positivo en $\mathbb{C}^+$

Espacios de De Branges y propiedad ZR

- Si $E(t) \neq 0$ con $t \in \mathbb{R}$ entonces $\mathcal{H}(E)$ verifica la propiedad ZR

  E es estricta
- Para cualquier función de estructura E existe una función de estructura estricta E' tal que $\mathcal{H}(E)$ y $\mathcal{H}(E')$ son isométricamente isomorfos.



A. G. García, M.A. Hernández-Medina and F. H. Szafraniec

Analytic Kramer kernels, Lagrange-type interpolation series and de Branges spaces,

Complex Variables & Elliptic Equations 58, no. 1 (2011)

Todo espacio de De Branges es $\mathcal{H}_K$

$\mathcal{H}(E)$ es isometricamente isomorfo a $\mathcal{H}_K$ con

$$[K(z)](w) = \frac{B(w)A(z) - A(w)B(z)}{\pi(w - z)}$$

$E(z) = A(z) - iB(z)$

$$A(z) = \frac{1}{2}(E(z) + E^*(z)) \quad B(z) = \frac{1}{2i}(E(z) - E^*(z))$$

¿Cuándo un espacio $\mathcal{H}_K$ es un espacio de de Branges?

Teorema

Si en $\mathcal{H}_K$ existe una fórmula de muestreo ortogonal que pueda escribirse como una serie interpoladora de tipo Lagrange

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(t_n) \frac{P(z)}{(z - t_n)P'(t_n)}, \; f \in \mathcal{H}_k, \; z \in \mathbb{C}$$

con $\{t_n\} \subset \mathbb{R}$ y $P^* = P$ entonces $\mathcal{H}_K$ es un espacio de de Branges.

Propiedad ZR en espacios H_K

Propiedad ZR en espacios H_K

Definición

Dado $w \in \mathbb{C}$, diremos que $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR_w si

$$f \in \mathcal{H}_K \text{ y } f(w) = 0 \Rightarrow g(z) = \frac{f(z)}{z - w} \in \mathcal{H}_K$$

Propiedad ZR en espacios H_K

Definición

Dado $w \in \mathbb{C}$, diremos que $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR_w si

$$f \in \mathcal{H}_K \text{ y } f(w) = 0 \Rightarrow g(z) = \frac{f(z)}{z - w} \in \mathcal{H}_K$$

ZR $\Leftrightarrow$ $\mathbf{ZR}_w$ para todo $w \in \mathbb{C}$

Propiedad ZR en espacios H_K

Teorema

Supongamos que $K(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Si existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR_w entonces $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR

$$\exists w \in \mathbb{C},\ \mathbf{ZR}_w \Rightarrow \mathbf{ZR}$$

Propiedad ZR en espacios H_K

Teorema

Supongamos que $K(z) \neq 0$, $z \in \mathbb{C}$. Si existe $w \in \mathbb{C}$ tal que $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR_w entonces $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR

$$\exists w \in \mathbb{C},\ \mathbf{ZR}_w \Rightarrow \mathbf{ZR}$$

$\mathcal{U} := \{w \in \mathbb{C} | ZR_w\}$ es abierto y cerrado en $\mathbb{C}$

Clave: Los funcionales de evaluación puntual son continuos en $\mathcal{H}_K$

$$\mathcal{H}_K \ni f \mapsto f(w) \in \mathbb{C}$$

Serie de potencias asociada a K

$$K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(a)(z-a)^n\,, \quad z \in \mathbb{C}\,, (\{c_n(a)\} \subset \mathcal{H})$$

$\mathcal{T}$ **inyectiva** $\Rightarrow \forall a \in \mathbb{C}$, $\{c_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ **es completa en** $\mathcal{H}$.

$\{K(z) | z \in \mathbb{C}\}$ **completo** $\Rightarrow$ $\mathcal{T}$ **isometría**

Propiedad ZR en espacios H_K. Independencia lineal

Sea $K(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ con $c_0, c_1 \ldots, c_N \in \mathcal{H}$.

$$\mathcal{H}_K \text{ verifica la propiedad ZR} \Leftrightarrow \{c_0, c_1 \ldots, c_N\} \text{ es l.i.}$$

Propiedad ZR en espacios H_K. Independencia lineal

Sea $K(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ con $c_0, c_1 \ldots, c_N \in \mathcal{H}$.

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR $\Leftrightarrow \{c_0, c_1 \ldots, c_N\}$ es l.i.

Sea $K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) z^n$ con $\{c_n(0)\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR$_0$ $\Rightarrow \{c_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ es l.i.

Propiedad ZR en espacios H_K. Independencia lineal

Sea $K(z) = \sum_{n=0}^{N} c_n z^n$ con $c_0, c_1 \ldots, c_N \in \mathcal{H}$.

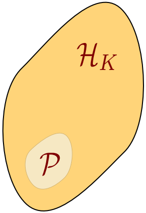
$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR $\Leftrightarrow \{c_0, c_1 \ldots, c_N\}$ es l.i.

Sea $K(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(0) z^n$ con $\{c_n(0)\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathcal{H}$

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR$_0$ $\Rightarrow \{c_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ es l.i.

$\mathcal{H}_K$ **verifica la propiedad ZR** $\Rightarrow \{c_n(a)\}_{n=0}^{\infty}$ **es l.i. para cada** $a \in \mathbb{C}$

$\mathcal{H}_K$ y el conjunto de polinomios $\mathcal{P}$



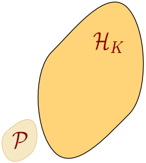
$\mathcal{P} \subset \mathcal{H}_K$

$\{c_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es **minimal** $\forall a \in \mathbb{C}$

$(c_m \notin \overline{\text{span}}\{c_n\}_{n\neq m}$ para cada $m \in \mathbb{N}_0)$

Ejemplo
$E^2(\gamma)$

$\mathcal{H}_K$ y el conjunto de polinomios $\mathcal{P}$



$\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_K = \varnothing$

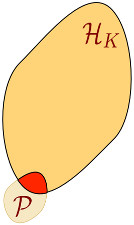
$\{c_n(a)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es **supercompleta** $\forall a \in \mathbb{C}$

($\{c_n\}_{n\geq m}$ es completa para cada $m \in \mathbb{N}_0$)

Ejemplo PW_π

$\mathcal{H}_K$ y el conjunto de polinomios $\mathcal{P}$

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR



- $\{c_n(a)\}_{n=0}^N$ l.i,
- $\{c_n(a)\}_{n>N}$ supercompleta y

$$\operatorname{span}\{c_n(a)\}_{n=0}^N \oplus \overline{\operatorname{span}}\{c_n(a)\}_{n>N} = \mathcal{H},\ \forall a \in \mathbb{C}$$

$\mathcal{P} \cap \mathcal{H}_K = \mathcal{P}_N$

Propiedad ZR_0

$f(z) = \langle K(z), x\rangle_{\mathcal{H}} \in \mathcal{H}_K$ con $x \in \mathcal{H}$, tal que $f(0) = 0$. Entonces $\langle c_0(0), x\rangle = 0$ y

$$\frac{f(z)}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle c_{n+1}(0), x\rangle z^n\,, \quad z \in \mathbb{C}\,.$$

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR_0 si para cada $x \in \{c_0(0)\}^{\perp}$ existe $y \in \mathcal{H}$ tal que

$$\langle c_n(0), y\rangle = \langle c_{n+1}(0), x\rangle\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Propiedad ZR_0

Teorema

Sean $\{f_1, f_2, f_3, \dots\} \subset \mathcal{H}$ y $\{d_1, d_2, d_3, \dots\} \subset \mathbb{C}$. Para que las ecuaciones

$$\langle f, f_n \rangle = d_n\,, \quad n \in \mathbb{N}$$

tengan al menos una solución $f \in \mathcal{H}$ con $\|f\| \leq M$, es necesario y suficiente que

$$\Big| \sum_n a_n \overline{d}_n \Big| \leq M \Big\| \sum_n a_n f_n \Big\|$$

para cada sucesión finita de números $\{a_n\}$. Si $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ es completa en $\mathcal{H}$, entonces la solución es única.

Propiedad ZR_0

Teorema

Sean $\{f_1, f_2, f_3, \dots\} \subset \mathcal{H}$ y $\{d_1, d_2, d_3, \dots\} \subset \mathbb{C}$. Para que las ecuaciones

$$\langle f, f_n \rangle = d_n \,, \quad n \in \mathbb{N}$$

tengan al menos una solución $f \in \mathcal{H}$ con $\|f\| \leq M$, es necesario y suficiente que

$$\Big| \sum_n a_n \overline{d}_n \Big| \leq M \Big\| \sum_n a_n f_n \Big\|$$

para cada sucesión finita de números $\{a_n\}$. Si $\{f_1, f_2, f_3, \dots\}$ es completa en $\mathcal{H}$, entonces la solución es única.

Cond. Suf.: $\mu\big(\sum_n a_n f_n\big) = \sum_n a_n \overline{d_n}$ continuo

Propiedad ZR_0

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR_0 si para cada $x \in \{c_0(0)\}^{\perp}$ el funcional $\mu_{0,x}$ definido en $Y_0 := \operatorname{span}\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ por

$$\mu_{0,x}\Big(\sum_n a_n c_n(0)\Big) = \sum_n a_n \langle c_{n+1}(0), x\rangle$$

es continuo.

Operador S_0

$$
\begin{tikzcd}
Y_0 \arrow[r, "S_0"] \arrow[d, "Id"] & Y_0 \arrow[r, "T_{0x}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "Id"] \\
Y_0 \arrow[rr, "\mu_{0x}"] & & \mathbb{C}
\end{tikzcd}
$$

$$S_0\left(\sum_n a_n c_n(0)\right) = \sum_n a_n c_{n+1}(0)$$

$$T_{0,x}\left(\sum_n a_n c_n(0)\right) = \sum_n a_n \langle c_n(0), x\rangle$$

Operador S_0

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, "S_0"] \arrow[d, "Id"] & Y_0 \arrow[r, "T_{0x}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "Id"] \\ Y_0 \arrow[rr, "\mu_{0x}"] & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$S_0\left(\sum_n a_n c_n(0)\right) = \sum_n a_n c_{n+1}(0)$$

$$T_{0,x}\left(\sum_n a_n c_n(0)\right) = \sum_n a_n \langle c_n(0), x\rangle$$

$\{c_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ linealmente independientes

Operador S_0

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, "S_0"] \arrow[d, "Id"] & Y_0 \arrow[r, "T_{0x}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "Id"] \\ Y_0 \arrow[rr, "\mu_{0x}"] & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$S_0\left(\sum_n a_n c_n(0)\right) = \sum_n a_n c_{n+1}(0)$$

$$T_{0,x}\left(\sum_n a_n c_n(0)\right) = \sum_n a_n \langle c_n(0), x\rangle \quad \textit{acotado}$$

$\{c_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ linealmente independientes

Operador S_0

$$\begin{tikzcd} Y_0 \arrow[r, "S_0"] \arrow[d, "Id"] & Y_0 \arrow[r, "T_{0x}"] & \mathbb{C} \arrow[d, "Id"] \\ Y_0 \arrow[rr, "\mu_{0x}"] & & \mathbb{C} \end{tikzcd}$$

$$\boxed{S_0 \text{ acotado } \Rightarrow \mu_{0x} \text{ acotado para todo } x \in \mathcal{H}}$$

$$S_0$$

$$c_0(0) \mapsto c_1(0) \cdots \mapsto c_n(0) \mapsto c_{n+1}(0) \mapsto \cdots c_l(0) \mapsto c_{l+1}(0) \cdots$$

S_0 shift generalizado

Operador S_0

S_0 continuo

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, "S_0^*"] \arrow[d, "\mathcal{T}"] & \mathcal{H} \arrow[d, "\mathcal{T}"] \\ \mathcal{H}_K \arrow[r, "\mathcal{B}_Z"] & \mathcal{H}_K \end{tikzcd}$$

$$\mathcal{B}_z f = \frac{f(z) - f(0)}{z}$$

$$c_0(0) \mapsto c_1(0) \cdots \mapsto c_n(0) \overset{S_0}{\mapsto} c_{n+1}(0) \mapsto \cdots c_l(0) \mapsto c_{l+1}(0) \cdots$$

S_0 shift generalizado

Operador S_0 y propiedad ZR

- $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ l.i.
  S_0 acotado $\Rightarrow$ $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR
- $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ l.i. y $1 \in \mathcal{H}_K$ $(c_0(0) \notin \overline{\text{span}}\{c_n(0)\}_{n>0})$
  $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR $\Leftrightarrow$ S_0 acotado

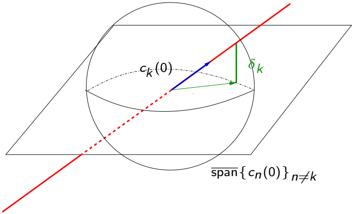
Operador S_0 y propiedad ZR

- $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ l.i.
  S_0 acotado $\Rightarrow$ $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR
- $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ l.i. y $1 \in \mathcal{H}_K$ $(c_0(0) \notin \overline{\text{span}}\{c_n(0)\}_{n>0})$
  $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR $\Leftrightarrow$ S_0 acotado
- $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ minimal
  $\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR $\Leftrightarrow$ S_0 acotado

Condición suficiente. Inclinaciones

Se definen

$$\delta_k := \inf_{\theta\in\mathbb{R}} \rho\Big(\mathrm{e}^{i\theta}\frac{c_k(0)}{\|c_k(0)\|}, \overline{\operatorname{span}}\{c_n(0)\}_{n\neq k}\Big)\,, \quad k\in\mathbb{N}_0\,, \qquad (1)$$



$\{c_n(0)\}_{n=0}^{\infty}$ es minimal en $\mathcal{H} \Rightarrow \delta_n > 0$ para cada $n\in\mathbb{N}_0$

Teorema

- $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es completa y minimal en $\mathcal{H}_K$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_n} \frac{\|c_{n+1}(0)\|}{\|c_n(0)\|} < \infty$

$\mathcal{H}_K$ **verifica la propiedad ZR**

Teorema

- $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es completa y minimal en $\mathcal{H}_K$
- $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\delta_n} \frac{\|c_{n+1}(0)\|}{\|c_n(0)\|} < \infty$

$\mathcal{H}_K$ verifica la propiedad ZR

Si $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ minimal y $x = \sum_n \alpha_n c_n(0)$ (finita o convergente) entonces

$$|\alpha_n| \leq \frac{\|x\|}{\delta_n \|c_n(0)\|}, n \in \mathbb{N}_0$$

f

¡Gracias!

Derivación en $\mathcal{H}_K$

En general el operador de diferenciación $\mathcal{D} : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$

$$\mathcal{D}(f) = f', \, f \in \mathcal{H}_K$$

no está bien definido en $\mathcal{H}_K$.

Derivación en $\mathcal{H}_K$

En general el operador de diferenciación $\mathcal{D} : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$

$$\mathcal{D}(f) = f',\ f \in \mathcal{H}_K$$

no está bien definido en $\mathcal{H}_K$.

Ejemplo $E^2(\gamma)$

$$K_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\gamma_n} z^n$$

Derivación en $\mathcal{H}_K$

En general el operador de diferenciación $\mathcal{D} : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$

$$\mathcal{D}(f) = f', \, f \in \mathcal{H}_K$$

no está bien definido en $\mathcal{H}_K$.

Ejemplo $E^2(\gamma)$

$$K_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\gamma_n} z^n$$

$\{e_n\}$ base ortonormal de $\mathcal{H}$, $\gamma_n = \sqrt{n!}$

Derivación en $\mathcal{H}_K$

En general el operador de diferenciación $\mathcal{D} : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$

$$\mathcal{D}(f) = f',\ f \in \mathcal{H}_K$$

no está bien definido en $\mathcal{H}_K$.

Ejemplo $E^2(\gamma)$

$$K_\gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e_n}{\gamma_n} z^n$$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n!}} \in \mathcal{H}_{K_\gamma}, \quad f' \notin \mathcal{H}_K$$

Derivación en $\mathcal{H}_K$

En general el operador de diferenciación $\mathcal{D} : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$

$$\mathcal{D}(f) = f',\ f \in \mathcal{H}_K$$

no está bien definido en $\mathcal{H}_K$.

Teorema

Supongamos que $\{c_n(0)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ es minimal y completa en $\mathcal{H}$. Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)}{\delta_n} \frac{\|c_{n+1}(0)\|}{\|c_n(0)\|} < \infty$$

Entonces $\mathcal{D}$ es un operador bien definido y acotado en $\mathcal{H}_K$.

Derivación y traslaciones en $\mathcal{H}_K$

$\mathcal{D} : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ $(\mathcal{D}(f) = f')$ **bien definido y acotado en** $\mathcal{H}_K$.

$$\Downarrow$$

$T_a : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$, $((T_a f)(z) = f(z-a))$ **bien definido y acotado en** $\mathcal{H}_K$

Derivación y traslaciones en $\mathcal{H}_K$

$\mathcal{D} : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$ $(\mathcal{D}(f) = f')$ **bien definido y acotado en** $\mathcal{H}_K$.

$$\Downarrow$$

$T_a : \mathcal{H}_K \to \mathcal{H}_K$, $((T_a f)(z) = f(z-a))$ **bien definido y acotado en** $\mathcal{H}_K$

$$T_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \mathcal{D}^n .$$

▸ f

W. N. Everitt and G. Nasri-Roudsari.
Sturm-Liouville problems with coupled boundary conditions and Lagrange interpolation series.
J. Comp. Anal. Appl., 1(4):319–347, 1999.

W. N. Everitt, G. Schöttler, and P. L. Butzer.
Sturm-Liouville boundary value problems and Lagrange interpolation series.
Rendiconti di Matematica, 14:87–126, 1994.

A. I. Zayed.
On Kramer sampling theorem associated with general Sturm-Liouville problems and Lagrange interpolation.
SIAM J. Appl. Math., 51:575–604, 1991.

A. I. Zayed, M. A. El-Sayed, and M. H. Annaby.
On Lagrange interpolation and Kramer's sampling theorem associated with self–adjoint boundary–value problems.
J. Math. Anal. Appl., 158:269–284, 1991.

A. I. Zayed, and P. L. Butzer.
Lagrange interpolation and Sampling theorems
in Nonuniform Sampling, Ed: F. Marvasti, Kluwer Academic, NY, 2001.

P. L. Butzer and G. Schöttler
Sampling Theorems Associated with Fourth-and Higher-Order Self-Adjoint Eigenvalue Problems
J. Comput. Appl. Math., 51:159-77, 1994.

G. Hinsen and D. Klösters.
The Sampling Series as a Limiting Case of Lagrange Interpolation
Appl. Anal., 49:49-60, 1993.

A. I. Zayed, G. Hinsen, and P. L. Butzer.
On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm-Liouville problems.
SIAM J. Appl. Math., 50:893–909, 1990.

Return